対称性と保存則

杉浦健一

2014/9/7

お品書き

1. 対称性とは？
2. Noether's theorem
3. 一般相対性理論における対称性と保存則

対称性のあるもの

Figure 1: 雪の結晶

Figure 2: ベルサイユ宮殿の庭園

Figure 3: 球

対称性とは？

対称性とは？

Definition (対称性)

対象物にある変換を施したとき, 対象のもつ何らかの性質が不変であること.

対称性とは？

Definition (対称性)

対象物にある変換を施したとき, 対象のもつ何らかの性質が不変であること.

3 つの要素

1. 対象物はなにか
2. どのような操作を行うか
3. 不変なものはなにか

対称性と群

対称性と群には深い結びつきがある.
ある性質 P があったとき, 操作 A_1 を施した時に P が不変であれば, $A_1 P = P$ とかける. また, 別の操作 A_2 についても $A_2 P = P$ となるとすると $A_2 A_1 P = P$ となり $A_2 \cdot A_1$ も P を不変に保つ. 逆操作や恒等変換 (何もしない) も性質を保つ. よって性質を不変に保つ操作全体は群 (変換群) をなす.

対称性と群

対称性と群には深い結びつきがある.
ある性質 P があったとき, 操作 A_1 を施した時に P が不変であれば, $A_1 P = P$ とかける. また, 別の操作 A_2 についても $A_2 P = P$ となるとすると $A_2 A_1 P = P$ となり $A_2 \cdot A_1$ も P を不変に保つ. 逆操作や恒等変換 (何もしない) も性質を保つ. よって性質を不変に保つ操作全体は群 (変換群) をなす.

Example

- Galilei 変換群
- Lorentz 変換群

ガリレイ対称性とニュートン力学 1

静止系 S とそれに対して一定速度 V で動いている慣性系 S' を考える．S 系で運動方程式

$$m\ddot{x} = F$$

が成立しているとすると S' 系では $x' = x - Vt$ とかけるので $\ddot{x}' = \ddot{x}$ となり，やはり S' 系でも同じ形の運動方程式

$$m\ddot{x}' = F$$

が成立する．

ガリレイ対称性とニュートン力学 2

逆に指導原理として次を要請してみる.

1. 任意の慣性系で運動方程式は不変.
2. 慣性系間の変換則はガリレイ変換をみたす.

ガリレイ対称性とニュートン力学 2

逆に指導原理として次を要請してみる.

1. 任意の慣性系で運動方程式は不変.
2. 慣性系間の変換則はガリレイ変換をみたす.

この時,m, F が変換に対してスカラーであることを仮定すれば,

$$m\ddot{x} = F$$

が一番簡単なガリレイ変換不変な形の方程式であることが分かる.

ローレンツ対称性と特殊相対論

特殊相対論は次の要請を指導原理としている.

1. 全ての物理法則は任意の慣性系で同じ形の方程式となる.
2. 任意の慣性系で光速度は不変

この 2 つの要請をみたす変換がローレンツ変換である

Emmy Noether

- 1882 ドイツ エアラルゲンに生まれる
- 1903 王立実家高等学校を卒業
- 1907 哲学博士号を授与される
- 1909 ヒルベルトに招かれてゲッティンゲン大学へ移る
- 1919 ゲッティンゲン大学で助教授となる
- ゲッティンゲン大学での研究で Noether's theorem や環論の構築に貢献する.

Figure 4: Emmy Noether

Noether's theorem

Theorem (Noether)

時間、空間のある連続変換群に対して作用が不変ならば、それに付随した保存量が存在する

Euler-Lagrange の方程式 1

ニュートンの運動方程式は $m\ddot{x} = \boldsymbol{F}$ で与えられる．簡単のために力は保存力，すなわち $\boldsymbol{F} = -\nabla V$ とかける場合を考える．
ここで,V はポテンシャル,T は運動エネルギーとして

$$V := V(x_1, x_2, x_3)$$

$$T := T(\dot{x_1}, \dot{x_2}, \dot{x_3}) = \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{2} m \dot{x_k}^2$$

で与えると，運動方程式は

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x_i}} = -\frac{\partial V}{\partial x_i}$$

と書き換えられる．

Euler-Lagrange の方程式 2

$\dfrac{\partial T}{\partial x_i} = 0, \dfrac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} = 0$ **に着目すると先程の式は**

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial L}{\partial x_i} \tag{1}$$

とかける. **ここで** $L := L(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3) = T - V$ **とした**. (1) **を** Euler-Lgrange **の方程式と呼び**,L **を** Lagrangian **という**. **この方程式は一般化座標でも同じ形式で書ける書けることが示せる**. **一般化座標を** q_i **とし**, **方程式を** N **質点系に拡張すると**,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (\mathrm{i} = 1, \ldots, 3\mathrm{N}) \tag{2}$$

変分原理

Lagrangian は物理量として意味のあるものではないが, 力学を組み立てる上では重要な量である.

変分原理

Lagrangian **は物理量として意味のあるものではないが**, **力学を組み立てる上では重要な量である**.

変分原理

作用を

$$S = \int_{t_0}^{t_1} dt L(q(t), \dot{q}(t)) \tag{3}$$

で定めるとき, **この値の最小値 (極値) を与えるような** $(q, \dot{q})$ **が実現される運動の軌跡である**.

この原理から Euler-Lagrange **の方程式を導出することが出来る (ここではやらない)**

Noether's theorem

Theorem (Noether)

時間、空間のある連続変換群に対して作用が不変ならば、それに付随した保存量が存在する

Noether's theorem

Theorem (Noether)

時間、空間のある連続変換群に対して作用が不変ならば、それに付随した保存量が存在する

微小座標変換に対して Lagrangian **が不変** $(\delta L = 0)$
$\Longleftrightarrow \dfrac{d}{dt}\left(\sum_i \dfrac{\partial L}{\partial q_i} g_i\right) = 0$ **すなわち** $\left(\sum_i \dfrac{\partial L}{\partial q_i} g_i\right) = \mathit{const.}$ **が言える**.

空間並進対称性と運動量保存則

$\boldsymbol{n}$ を定ベクトルとして

$$\delta \boldsymbol{q}_a = \varepsilon \boldsymbol{n}$$

とすればこれは微小空間並進を表す, このとき Noether charge は

$$\left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}_a} \cdot \boldsymbol{n} \right) = \mathit{const.}$$

$$\therefore \sum_i \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}_a} = \mathit{const.} \;\; \mathit{vec.}$$

最後の式はまさに運動量保存則である.

空間回転対称性と角運動量保存則

デカルト座標で考え,a 番目の質点の位置を $\boldsymbol{r}_a$ とする.
定ベクトル $\boldsymbol{n}$ について

$$\boldsymbol{r}_a \to \boldsymbol{r}_a{}' = \boldsymbol{r}_a + \varepsilon \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{r}_a$$

とすればこれは微小空間回転を表す.Noether charge は

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{a=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_a} \cdot (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{r}_a) \\ &= \boldsymbol{n} \cdot \sum_{a=1}^{N} (\boldsymbol{r}_a \times \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_a}) \\ &= \boldsymbol{n} \cdot \sum_{a=1}^{N} (\boldsymbol{r}_a \times \boldsymbol{p}_a) = \mathit{const.} \therefore \boldsymbol{L} := \sum_{a=1}^{N} (\boldsymbol{r}_a \times \boldsymbol{p}_a) = \mathit{const.}\ \ \mathit{vec.} \end{aligned}$$

よって微小空間回転における対称性から $\boldsymbol{n}$ 軸周りの全角運動量の保存が導かれた.

時間並進対称性とエネルギー保存則 1

座標変換は,

$$
\begin{aligned}
t \to t' &= t + \varepsilon \\
q_i \to q_i' &= q_i \\
\dot{q}_i \to \dot{q}_i' &= \dot{q}_i
\end{aligned}
$$

を考える (**時間のみを微小並進した**).
この時.

$$
\delta L = L(q, \dot{q}, t') - L(q, \dot{q}, t) = \frac{\partial L}{\partial t}\varepsilon + o(\varepsilon^2)
$$

一方で

$$
\begin{aligned}
\frac{dL}{dt} &= \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i \\
&= \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{d}{dt}\left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i\right)
\end{aligned}
$$

時間並進対称性とエネルギー保存則 2

ここで, ハミルトン関数

$$H := \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i - L$$

を導入すると, 次のようになる.

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

もし $\delta L = 0$ すなわち $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ が成立すれば,

$$H = \mathit{const.}$$

となることが分かる. T, V が時間に依存せず,$L = T - V$ であるとき,$H = T + V$ であることが示されるので, 最後の式はエネルギー保存を表していると言える.

一般相対性原理と等価原理

一般相対論は次の 2 つを指導原理として組み立てられている.

一般相対性原理

任意の座標変換に対して物理法則は局所的に同じ形の方程式となる.

等価原理

局所的に重力の作用を打ち消し, 特殊相対論が成立する座標系を設けることが出来る.

一般相対性原理と等価原理

一般相対論は次の 2 つを指導原理として組み立てられている.

一般相対性原理

任意の座標変換に対して物理法則は局所的に同じ形の方程式となる.

等価原理

局所的に重力の作用を打ち消し, 特殊相対論が成立する座標系を設けることが出来る.

この指導原理から導かれる一番簡単な重力場の方程式が Einstein 方程式

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = T^{\mu\nu} \tag{4}$$

である.

リーマン計量

一般の座標系での微小距離が

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$$

で与えられているとする. この時二次形式の係数 $g_{\mu\nu}$ をリーマン計量という.
一般相対性原理から座標変換を考えた時も同じ時空点での微小距離は変わらないはずであり,

$$ds^2 = g'_{\mu\nu}dx^{\mu'}dx^{\nu'} = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$$

ここからリーマン計量は座標変換により次の変換則をみたすことが分かる.

$$g'_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\beta'}}g_{\mu\nu} \tag{5}$$

スカラー, ベクトル, テンソル

スカラー, ベクトル, テンソルをそれぞれ次の変換則をみたす量として定義する

- **スカラー**

$$S(x) \to S'(x') = S(x) \tag{6}$$

- **共変ベクトル**

$$V_\mu(x) \to V_{\mu'}(x') = \partial_{\mu'} x^\mu \, V_\mu(x) \tag{7}$$

- **反変ベクトル**

$$V^\mu(x) \to V^{\mu'}(x') = \partial_\mu x^{\mu'} \, V^\mu(x) \tag{8}$$

- **テンソル (m 階反変 n 階共変テンソル)**

$$\begin{aligned} &T^{\mu'_1 \cdots \mu'_m}{}_{\nu'_1 \cdots \nu'_n}(x') \\ &= \partial_{\mu_1} x^{\mu'_1} \cdots \partial_{\mu_m} x^{\mu'_m} \cdot \partial_{\nu'_1} x^{\nu_1} \cdots \partial_{\nu'_n} x^{\nu_n} \, T^{\mu_1 \cdots \mu_m}{}_{\nu_1 \cdots \nu_n}(x) \end{aligned}$$