



New Series, No.A2. version Sep. 2011.

3次正方行列 (1)

Copy-ultra-Left. All-Rights ReVERSEd.

Article by YAMASHITA, KOICHIRO.

MJKns(2011-) Algebra-2. Tue Sep 13 11:51:35 2011 JST

This file is: mjkNSA02bt1.pdf

downloadable from <http://kymst.net/index.php?MJK/>

mail to: kymstkymst@gmail.com

MJK A-1「行列と可換性」の冒頭で次の様に述べた：

複数の量の統一体たる vector が複数個与えられたとき、

それらを再び貫く統一原理は存在するのか？

複数個の vector は、纏められて何になるのか？

この Document MJK A-2 では、この問題意識を 3 次の正方行列について深化し、3 次元 vector 幾何と 3 元連立方程式との関係において、我々の行列論を発展させよう。

記法については、MJK A-1 での約束を踏襲する。

1 超難問！

予てより、一部の諸君には予告しておいた超難問，KGM problem，つまり

キングギドラ・ゴジラ・モスラ算

から話を始めよう。次の様な問題であった：

(KGM problem)

キングギドラ が x 羽，ゴジラが y 頭，モスラが z 匹いて，頭，手足，羽の合計がそれぞれ 18, 52, 16 であるとき， x, y, z を求めよ。ただしキングギドラ，ゴジラ，モスラがそれぞれ複数存在することは，証明なしに用いてよい。

KGM problem を解くための Hint を Figure 1 (p. 2) に挙げた。画像はそれぞれ次の方々によるものである：

- クリエイティブデザイン羽沢組 <http://wave.ap.teacup.com/hazawagumi/330.html>
- レッドキング愛護協会（紅月せな）
http://blog.livedoor.jp/redking41_94/archives/cat_50021653.html
- ソフビ図鑑 ～ 東宝怪獣編 ～
<http://members3.jcom.home.ne.jp/kaijuland/zukan/toho/toho.html>

Figure 1: KGM problem



(KGM problem) は、次の 3 元 1 次連立方程式を解くことと同値である：

$$\begin{cases} 3x + y + z = 18, \\ 2x + 4y + 6z = 52, \\ 2x + 2z = 16, \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 52 \\ 16 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

この 3 次正方行列を C とし、また $\mathbf{x} = {}^T(xyz)$, $\mathbf{a} = {}^T(18\ 52\ 16)$ とすれば、連立方程式 (1) は

$$C\mathbf{x} = \mathbf{a} \quad (2)$$

となり、 C の逆行列 C^{-1} が存在する限りでそれを (2) の両辺に左から乗じて、解 vector $\mathbf{x} = C^{-1}\mathbf{a}$ を得る。

従って、当面の我々の目標は、一般の 3 次正方行列について、それが**正則** (*regular, invertible*) である、つまり逆行列をもつための必要十分条件を見出し、更にその逆行列が何如なるものになるか、を考察することである。

そのための我々の道程は、一見したところ遠回りに思われるかもしれない。具体的には、いきなり行列の逆元を求めるのではなく、3 次元空間 $\mathbb{K}^3$ ——ここで、体 $\mathbb{K}$ は実数体 $\mathbb{R}$ としてよい。キングギドラなどが存在するとしたら、彼、彼女らの頭や手足、羽の数は正整数であろうからである... ホントカ?!——における、「外積」と「箱積」と呼ばれる vector についての演算を用いるからである。しかし筆者 kymst は、その迂回路を通じてこそ、2 次の世界 $M_2(\mathbb{K})$ から 3 次の世界 $M_3(\mathbb{K})$ への次元跳躍が、天下りではない、理論の bottom-up な構成とともに実現されると信ずる。更に、この方略によって、連立方程式 (1), (2) への 2 つの接近が可能となる。

2 Vector の外積

実 3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ に 2 つの vector $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ が与えられたとする。この $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ について、外積という演算を定義する。

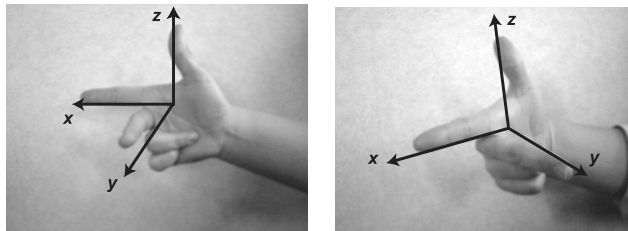
2.1 右手系基底

まず、空間の向付け (*orientation*) という概念を押さえよう。右手と左手の両方で Good Luck sign を作ってみて欲しい。親指以外について、根本から指先に回る回転方向が逆になっている。この回転方

向と親指の向きの関係が、右手のようになっているとき、この向付けを**右手系** (*dextral-, right-handed-system*), 左手のようになっているとき**左手系** (*sinistral-, left-handed, system*) と言う. 右手系では, 親指を真上から見ると, 親指以外の指の回転方向は反時計回りであり, 左手系では時計回りであることが解る.

次に, 右手系で人差し指を真っ直ぐに伸ばし, 中指を人差し指と直角になるようにして, 更に親指を立てる. 人差し指を x , 中指を y , 親指を z と考えるとき, この 3 個の vector の (順序も考えた) 組 (x, y, z) を**右手系基底** (*dextral base*) と言う. 指を伸ばすのに筋が痛かったが頑張った Figure 2 を見られたい. 通常, 我々の用いている座標空間は 3 本の軸が (x, y, z) の順に右手系を作っている¹. 左手でも同じようにして, 比べてみて欲しい.

Figure 2: 右手系基底



2.2 外積

では, この右手系という概念を用いて, 2 つの vector a と b の外積を定義しよう.

Definition 2.1 (Vector の外積)

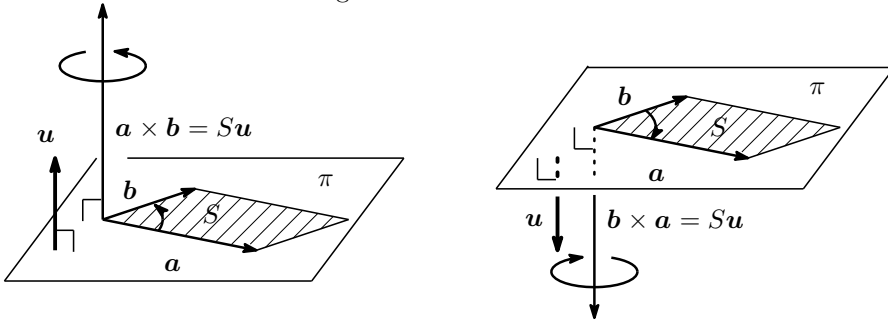
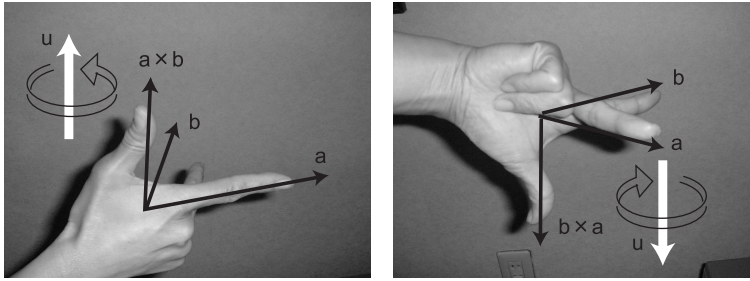
$a, b \in \mathbb{R}^3$ を線形独立な 2 つの vector とする. a と b のいずれとも垂直な単位 vector u を, (a, b, u) が右手系基底を作るように選ぶ. ただし, a と b のなす角について, $0 < \angle(a, b) < \pi$ とする. また, a と b の張る平行 4 辺形の面積を $S = S(a, b)$ とする. この様にして定まる vector $Su = S(a, b)u$ を a と b の**外積** (*outer product*), **クロス積** (*cross product*), または **vector 積** (*vector product*) と呼び, $a \times b$ と表わす (Figures 3, 4 を見られたい):

$$a \times b \stackrel{\text{def}}{=} S(a, b)u.$$

a と b が線形従属であるときには, 単位 vector u が定まらないが, このときは $S(a, b) = 0$ となるから, $a \times b = o$ と定める.

¹ただし, 常に, という訳ではない. POV-RAY という非常に優れた 3 次元 Graphic Software があるが, POV-RAY では左手系が用いられており, 使い始めたころ, 図形がアサツタの方を向いてしまうのに戸惑ったことがある. 裏返ってしまう訳である.

Figure 3: Vector の外積

Figure 4: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$ 

2.3 外積の基本性質

世に外積を用いて空間図形の問題をアッサリ解いてエバッテル愕醜惨狡書——どうも **computer** の調子が...——は多いが，そこには成分計算だけしか出て来ない．2つの vector の両方に垂直な vector を求めて喜んでいるだけである．挙句の果てには「魔方陣」みたいなのを書き散らかして，自分の数学的 literacy の欠如を曝け出してるようなものもある．

ここでは，その成分計算の根拠を，結果論ではなく，むしろ外積の基本性質から，あくまでも bottom-up に導き出すことを目指そう．

まずは定理として列挙してしまおう．

THEOREM 2.2 (外積の性質)

$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ について，次が成り立つ：

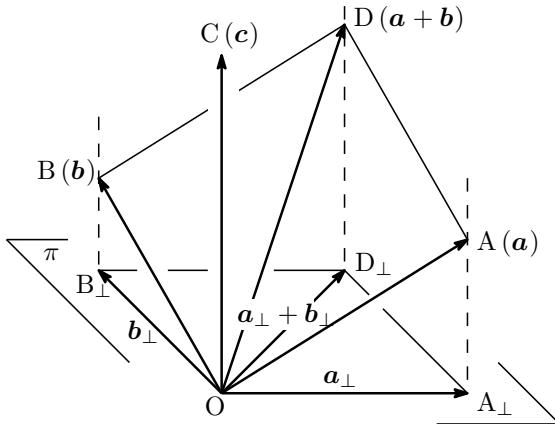
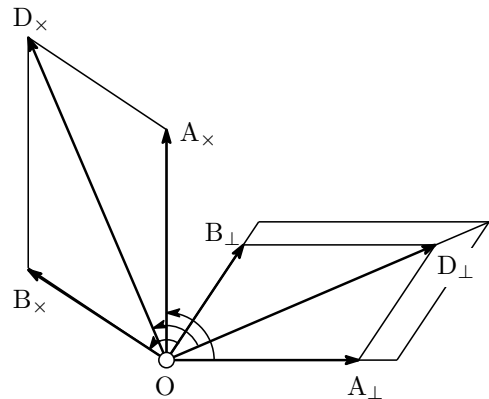
- (i) $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ のいずれも $\neq \mathbf{o}$ ならば， $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{o} \iff \mathbf{a} // \mathbf{b}$. 特に $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{o}$.
- (ii) 外積は交代性 (alternativity) をもつ： $\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$.
- (iii) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ について $(\alpha \mathbf{a}) \times (\beta \mathbf{b}) = \alpha\beta(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$.
- (iv) $\mathbf{c} \times (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{c} \times \mathbf{a} + \mathbf{c} \times \mathbf{b}$, $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$.
つまり，外積は加法に対して分配的である．

(i) と (ii) は, そもそも外積の定義 Definition 2.1 の中に含まれているから, 証明は不要であろう. (iii) については, $\alpha, \beta \geq 0$ である場合には, 2 つの vector の張る平行 4 辺形の辺の長さが α 倍, β 倍されるだけであるから明らかである. α, β の少なくとも一方が < 0 である場合には, 次に注意すればやはりこれに帰着する:

$$(-\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (-\mathbf{b}) = -(\mathbf{a} \times \mathbf{b}), \quad (-\mathbf{a}) \times (-\mathbf{b}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b}.$$

これらに対して, (iv) の分配性は重要である. いくつかの文献で調べてみたが, 最近のものほど「泣く子もダマル成分計算」がほとんどであった. それに対して, 1950 年の頃の文献で, ある意味では非常に初等幾何的かつ原理的な証明を見つけた. ただし, そのままでは我々にとって読み易いものではないので, 多少改変した証明を見てもらうことにする. Figures 5, 6 を見られたい.

Figure 5: 外積の分配性

Figure 6: 平面 π 

Proof.

$\mathbf{c} \times (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{c} \times \mathbf{a} + \mathbf{c} \times \mathbf{b}$ を示す. O を基点として $A(\mathbf{a}), B(\mathbf{b}), C(\mathbf{c})$ とし, また $D(\mathbf{a} + \mathbf{b})$ とする. O を含み $\mathbf{c}$ と垂直な平面を π とし, 3 点 A, B, D の π への正射影をそれぞれ $A_\perp, B_\perp, D_\perp$ とする. 平行 4 辺形 $OADB$ の正射影として, 4 角形 $OA_\perp D_\perp B_\perp$ も平行 4 辺形である. そこで, $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ の π への正射影も $\mathbf{a}_\perp, \mathbf{b}_\perp$ と書けば, $\overrightarrow{OD} = \mathbf{a}_\perp + \mathbf{b}_\perp$ である.

まず, $\mathbf{c} \times \mathbf{a}$ の大きさについて, 外積の定義より

$$|\mathbf{c} \times \mathbf{a}| = S(\mathbf{c}, \mathbf{a}) = |\mathbf{c}||\mathbf{a}| \sin(\mathbf{c}, \mathbf{a}) = |\mathbf{c}||\mathbf{a}_\perp|$$

であり, またその方向については $\mathbf{c}$ と $\mathbf{a}$ のいずれとも垂直, つまり $\mathbf{c}$ と $\mathbf{a}_\perp$ のいずれとも垂直であるから, 平面 π に含まれる. 従って, $\mathbf{c} \times \mathbf{a}$ は $\mathbf{a}_\perp$ を $|\mathbf{c}|$ 倍して, その後 $\pi/2$ だけ回転した vector になる.

この, 3 つの操作, つまり

- 平面 π への正射影 (Projection) を P で,
- $|c|$ 倍だけの scalar 乗法 (Multiplication) を M で,
- また, 右手系の $\pi/2$ 回転 (Rotation) を R で,

表わせば, $c \times a$ は次の図式 (diagram) により表現される:

$$a \xrightarrow{P} a_{\perp} \xrightarrow{M} |c|a_{\perp} \xrightarrow{R} c \times a.$$

まったく同様にして, $c \times b$, $c \times (a + b)$ はそれぞれ

$$\begin{aligned} b &\xrightarrow{P} b_{\perp} \xrightarrow{M} |c|b_{\perp} \xrightarrow{R} c \times b, \\ a + b &\xrightarrow{P} (a + b)_{\perp} = a_{\perp} + b_{\perp} \xrightarrow{M} |c|(a_{\perp} + b_{\perp}) \xrightarrow{R} c \times (a + b). \end{aligned}$$

従って, 平行 4 辺形 OADB についても (Figure 6 を見られたい),

$$OADB \xrightarrow{P} OA_{\perp}D_{\perp}B_{\perp} \xrightarrow{M,R} OA_{\times}D_{\times}B_{\times}$$

によって 4 角形 $OA_{\times}D_{\times}B_{\times}$ に移る. ところが, $|c|$ を乗じる操作 M と, $\pi/2$ 回転させる操作 R によって, 平行 4 辺形の形状は不変に保たれるから, 4 角形 $OA_{\times}D_{\times}B_{\times}$ も平行 4 辺形である. よって $\overrightarrow{OD}_{\times} = \overrightarrow{OA}_{\times} + \overrightarrow{OB}_{\times}$ について

$$c \times (a + b) = c \times a + c \times b$$

が言えた.

これで, Theorem 2.2 の分配性 (iv) の最初の式が示された. 第 2 式については, (ii) の交代性を 2 回用いて

$$\begin{aligned} (a + b) \times c &= -(c \times (a + b)) = -(c \times a + c \times b) \\ &= -(c \times a) - (c \times b) = a \times c + b \times c \end{aligned}$$

となる. ■

さて, この分配性は一般化することができるのは明らかであろう.

$$\begin{aligned} (a + b) \times (c + d) &= (a + b) \times c + (a + b) \times d \\ &= a \times c + b \times c + a \times d + b \times d \end{aligned}$$

などである. この辺は, 可換でなく交代的であることを除いて, 内積と同様である.

2.4 外積の成分表示

以上により, 我々は任意に 2 つの空間 vector が成分で与えられたとき, その 2 つの vector の外積を成分で求めることができる地平に到達したことになる. まずは, 基本単位 vector の外積についてまとめておこう.

Lemma 2.3

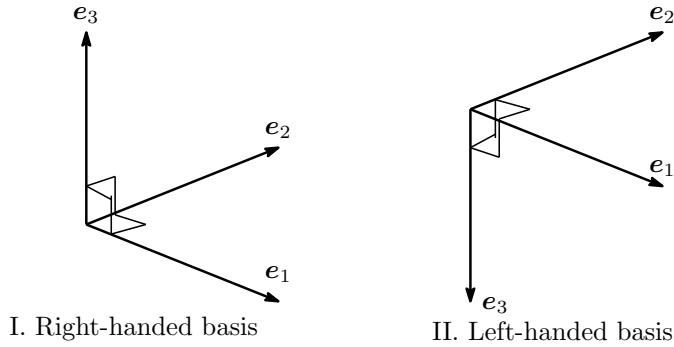
右手系で向き付けられた 3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ の, x, y, z 軸の基本単位 vector を, それぞれ $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ とすると, 次が成り立つ:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}_3, & \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 &= \mathbf{e}_1, & \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 &= \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1 &= -\mathbf{e}_3, & \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2 &= -\mathbf{e}_1, & \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3 &= -\mathbf{e}_2. \end{aligned}$$

この基本 vector の組 $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ を**右手系 vector 基底** (*right-handed vector basis*) と言う.

次の Figure 7 に, 右手系と左手系の基底を描いた. I. の右手系について, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ をそれぞれ右手の親指, 人差し指, 中指に対応させて, これらの式が成り立つことを確認して欲しい.

Figure 7: Vector 基底の右手系と左手系



この Lemma 2.3 と, 外積の分配性によって, 外積の成分計算が可能になる. 定理として整理しよう:

THEOREM 2.4 (外積の成分表示)

$\mathbb{R}^3$ における 2 つの vector $\mathbf{a} = {}^T(a_1 \ a_2 \ a_3)$, $\mathbf{b} = {}^T(b_1 \ b_2 \ b_3)$ について, その外積 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ は

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

となる.

Proof.

$\mathbf{a} = {}^T(a_1 \ a_2 \ a_3) = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3$, $\mathbf{b} = {}^T(b_1 \ b_2 \ b_3) = b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 + b_3 \mathbf{e}_3$ について, 分配性を繰り返し用いれば

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3) \times (b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 + b_3 \mathbf{e}_3) \\ &= a_1 b_1 (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_1) + a_1 b_2 (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) + a_1 b_3 (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3) \\ &\quad + a_2 b_1 (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1) + a_2 b_2 (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_2) + a_2 b_3 (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) \\ &\quad + a_3 b_1 (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1) + a_3 b_2 (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2) + a_3 b_3 (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_3) \end{aligned}$$

を得る. ここで $i = 1, 2, 3$ について $\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_i = \mathbf{o}$ (Theorem 2.2 (i)) と Lemma 2.3 に注意すれば, この右辺は

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= a_1 b_2 \mathbf{e}_3 - a_1 b_3 \mathbf{e}_2 - a_2 b_1 \mathbf{e}_3 + a_2 b_3 \mathbf{e}_1 + a_3 b_1 \mathbf{e}_2 - a_3 b_2 \mathbf{e}_1 \\
 &= (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \mathbf{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{e}_3 \\
 &= \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

となり, 確かに定理に言う通りである. ■

この成分による表示は, 行列式を用いて次のようにも書けることに注意しておこう:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \mathbf{T} \left(\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right). \quad (3)$$

読むな!

この定理の結果を外積の定義とする **下品な流儀**もある. 成分計算のみで vector を扱おうとする数学的怠惰, そこには, 我々が生を送る時空の特性理解としての右手系と左手系の区別も, また空間の直観的把握としての外積の幾何学的基礎付けもない. さもしくもあさましい, **数学的に脆弱で哲学的に醜悪**^aという形容以外, 筆者 **kymst** には思い浮かばない.

垂直な vector を求めることが人生の目的ならば, 生きてる限り成分計算をしているがいい. 引き止めはしないが, 気の毒だとは思ふ.

読むなって言ったのに...

^a*mathematically weak, philosophically ugly...* 前世紀を代表する論理学者の 1 人, Alfred Tarski (1902-1983) がある論理学上の立場について論評した言葉.

3 Scalar 3 重積

更に進んで, 3 個の vector に関する演算を考察しよう. 我々の主目標である, 3 次正方行列の行列式は目前である.

3.1 Vector Triplet

いずれも zero vector $\mathbf{o}$ ではなく, また線形独立な 3 個の vector $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ について, これら 3 項から成る列 $(\mathbf{abc})$ を考える. あくまでも**順序をもつ列であって, 集合ではない**. つまり $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$ ならば $(\mathbf{abc})$ と $(\mathbf{bac})$ は異なる². この 3 項列を **vector ordered triplet**, 略して **vot** と呼ぶことにしよう.

²項の数が 2 個ならば, 「順序対」ordered pair という言葉があつて, 2 つの要素からなる集合と区別しやすいのだが, 3 項より多くなると困る. かつて「3 項対」という言葉を使っているのを目にしてノケゾツタ. オマエ, ソレハナイダロウ! というのが感想であつた. **kymst** には「対」という単語の意味まで変えてしまう程の勇氣はない. その点, European Language は恵まれている. 英語で言えば

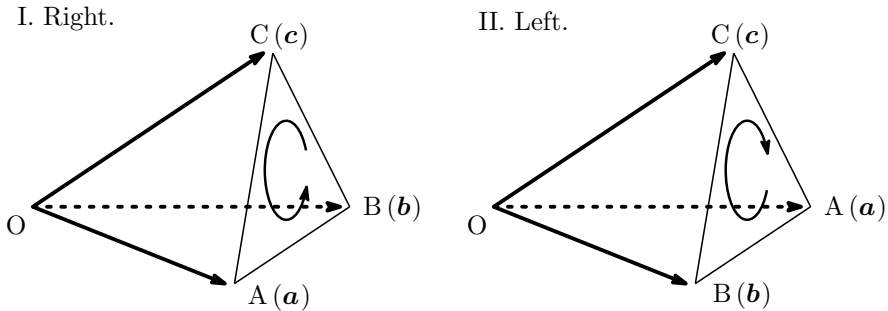
2:pair, 3:triplet, 4:quartet, 5:quintet, 6:sextet, 7:septet, 8:octet, 9:nonet, 10:decade

などがあり, これに形容詞 “ordered” を冠せば, 順序を考えない集合と区別することができる. (345) や (5 12 13) などを *Pythagorean Triplet* と言うが, これも日本語だと「ピタゴラス数」で, 3 個の組である, という要点がぼやける. エライ悶々官僚の先生方になんとかしてもらいたいものである.

そして, vot の項である 3 個の vector が線形独立であるとき, その vot は**正則** (*regular*) である, と言おう.

まず, $\text{vot}(\mathbf{abc})$ に, 右手系と左手系の区別を設ける. $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ の基点を定点 O に揃え, $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$ とする. 3 個の vector の独立性により, 4 点 ($OABC$) は共面ではない. 次の Figure 8(p. 9) を見られたい. ここで, 基点 O に視点があるとする.

Figure 8: Vot の右手系と左手系



$\text{Vot}(\mathbf{abc})$ について, 3 個の vector の終点 A, B, C をこの順に進む回路 $A \rightarrow B \rightarrow C$ を考えると, 図の I と II の間には決定的な違いがあることに気が付くはずである. 基点 O に視点を置いてこの回路を見ると, I では時計廻りに, II では反時計廻りに動いていることが解る. 逆に, 面 ABC に対して O とは反対側に視点を置くと, 回路の廻り方は逆に見える. この区別を, ある vot が与えられたとき, その vot が右手系か左手系かの区別として定義しよう.

Definition 3.1 (Right Vot と Left Vot.)

$\text{Vot}(\mathbf{abc})$ について, $A(\mathbf{a}), B(\mathbf{b}), C(\mathbf{c})$ とする. 基点 O から回路 $A \rightarrow B \rightarrow C$ を見るとき, (4) の様な閉じた回路ができる. その回路が時計廻りであるならば, $(\mathbf{abc})$ は右手系 vot (right-handed vector ordered triplet) であると言う. 逆に, その回路が反時計廻りであるならば, $(\mathbf{abc})$ は左手系 vot であると言う.

$$\begin{array}{ccc}
 & C & \\
 \nearrow & & \searrow \\
 B & \text{right} & A \\
 \longleftarrow & & \longrightarrow
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 & C & \\
 \nearrow & & \searrow \\
 A & \text{left} & B \\
 \longleftarrow & & \longrightarrow
 \end{array}
 \tag{4}$$

この定義は, 3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ の vector 基底の右手系と左手系を描いた Figure 6(p. 5) についても, そのまま成り立つことを確かめること.

3.2 箱積

さて, 任意の $\text{vot}(\mathbf{abc})$ について, 外積 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ と $\mathbf{c}$ との内積, つまり $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ を対応させよう. 実は, この式は括弧を除いて $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ と書いても曖昧さはない. と言うのも, $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$ は意味を

もたないからである (外積は 2 つの vector についてのみ定義されるから). しかし, 括弧がある方が「目に優しい」ので, $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ の様を書くことにしよう.

3 個の vector についてのこの演算, つまり

$$\text{vot}(\mathbf{abc}) \mapsto (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$$

を, **scalar 3 重積** (*scalar triple product*) と呼ぶ. 名前の由来は明らかであろう. 内積の演算結果は, 常に scalar 量, 差し当っては実数, であるからである.

この scalar 3 重積はまた**箱積** (*box product*) と呼ばれることもある. この名の由来は, 次の定理が成り立つことにある:

THEOREM 3.2 (Scalar 3 重積と平行 6 面体)

正則な $\text{vot}(\mathbf{abc})$ について, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ の張る平行 6 面体の (絶対) 体積を V とする.

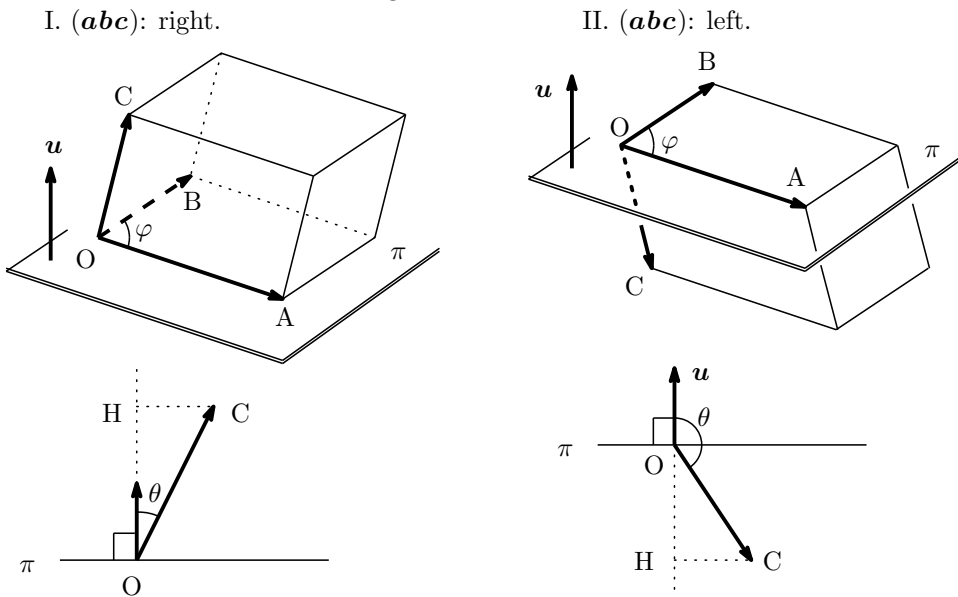
$(\mathbf{abc})$ が右手系であるならば, scalar 3 重積 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ は V に等しく, また左手系であるならば $-V$ に等しい.

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{cases} V & \text{if } (\mathbf{abc}) \text{ is right-handed,} \\ -V & \text{else.} \end{cases}$$

Proof.

Figure 9 を見られたい.

Figure 9: 平行 6 面体



$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の張る平面を π とし, またそれらの張る平行 4 辺形の面積を S とする: $\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \varphi$ として $S = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\varphi$. また, 外積 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ と同じ向きの単位 vector を $\mathbf{u}$ とすれば

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = S\mathbf{u} \iff \mathbf{u} = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{S} = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}.$$

$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ の向きは, $\mathbf{a}$ を π 未満の回転で $\mathbf{b}$ に重ねる回転方向に右ネジを廻すときのネジの進む方向である. Figure 9 から解るように, $\text{vot}(\mathbf{abc})$ が I の右手系をなす場合には, $\mathbf{u}$ と $\mathbf{c}$ は平面 π に対して同じ側に向かい, II の左手系をなす場合には反対側に向かう. 従って, $\angle(\mathbf{u}, \mathbf{c}) = \theta$ とすれば, $\text{vot}(\mathbf{abc})$ が右手系ならば $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$, 左手系ならば $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$ である.

ここで, $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$ の $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ への正射影を $\overline{OH}$ とすると $\overline{OH} = |\mathbf{c}|\cos\theta = \mathbf{u} \cdot \mathbf{c}$ であるから,

$$\text{vot}(\mathbf{abc}) : \text{right} \iff \cos\theta > 0 \iff \overline{OH} > 0,$$

$$\text{vot}(\mathbf{abc}) : \text{left} \iff \cos\theta < 0 \iff \overline{OH} < 0$$

となる. $\text{Vot}(\mathbf{abc})$ の張る平行 6 面体の体積 V は

$$V = S|\overline{OH}| = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}||\mathbf{c}|\cos\theta|$$

であり, 最右辺の絶対値について

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}||\mathbf{c}|\cos\theta| = \begin{cases} |\mathbf{a} \times \mathbf{b}||\mathbf{c}|\cos\theta = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}, & \text{if } \cos\theta > 0 \iff (\mathbf{abc}) : \text{right}, \\ |\mathbf{a} \times \mathbf{b}||\mathbf{c}|(-\cos\theta) = -(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}, & \text{if } \cos\theta < 0 \iff (\mathbf{abc}) : \text{left} \end{cases}$$

である. 従って

$$V = \begin{cases} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}, & \text{if } \text{vot}(\mathbf{abc}) : \text{right}, \\ -(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}, & \text{if } \text{vot}(\mathbf{abc}) : \text{left} \end{cases}$$

が言えて, 定理が証明された. ■

3.3 Scalar 3 重積の基本性質

Scalar 3 重積 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ について, 次が成り立つ. ここで, $\text{vot}(\mathbf{abc})$ は正則であるとする (つまり, いずれも $\mathbf{o}$ ではなく, かつ線形独立である).

列挙する:

- †1 $\text{vot}(\mathbf{abc})$ が右手系であれば, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ の巡回置換 $\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{b} \rightarrow \mathbf{c}$ によって得られる $\text{vot}(\mathbf{bca}), (\mathbf{cab})$ も右手系である. 左手系であるとしても同様. つまり

巡回置換は左右の系を不変に保つ.

右手系, 左手系が Figure 8 (p.9) における 3 点 A, B, C の作る回路で定義されたことを考えれば明らかであろう.

†2 従って, scalar 3 重積は, 巡回置換によって値を不変に保たれる:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \begin{cases} V & \text{if } (\mathbf{abc}) : \text{right,} \\ -V & \text{if } (\mathbf{abc}) : \text{left.} \end{cases}$$

ここで, V は $(\mathbf{abc})$ の張る平行 6 面体の (絶対) 体積である.

†3 それに対して, $\text{vot } (\mathbf{abc})$ に任意の互換を施すとき, 右手系は左手系に, また左手系は右手系に移る. 従って, 互換は scalar 3 重積の符号を変える.

例えば, $\text{vot } (\mathbf{abc})$ に $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の互換 $\mathbf{a} \leftrightarrow \mathbf{b}$ を施せば $(\mathbf{bac})$ を得る. 外積の交代性 $\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ によって $(\mathbf{abc})$ の scalar 3 重積 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ と, $(\mathbf{bac})$ の scalar 3 重積 $(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c}$ とは, 符号が逆になる.

†4 $\text{Vot } (\mathbf{abc})$ についての scalar 3 重積で, 外積と内積を交換しても, 値は不変に保たれる:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}).$$

何故なら, †2 と内積の可換性を合せて

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

が成り立つから.

†5 以上より, 次のように言える:

THEOREM 3.3 (Heaviside の関係式と Grassmann 記号)

$\text{Vot } (\mathbf{abc})$ から得られる 6 個の積

$$\text{I) } (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}, (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a}, (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}; \quad \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}), \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}), \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

の値はすべて等しい. また, この vot に互換を施した $(\mathbf{bac})$ から得られる 6 個の積

$$\text{II) } (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c}, (\mathbf{c} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a}, (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{b}; \quad \mathbf{a} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{b}), \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c}), \mathbf{c} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{a})$$

の値はすべて等しい. I) の値を V とすれば II) の値は $-V$ である.

こうして, 3 個の vector $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ に, 外積と内積を 1 回ずつ施して得られるこれら 12 通りの演算結果は, ただ 2 つに類別される (この関係式を **Heaviside の関係式** (*Heaviside Relation*) と言うらしい)³.

そこで, I) を $[\mathbf{abc}]$ により, また II) を $[\mathbf{bac}]$ により, 一切の曖昧さなしに表すことができる. この記号 $[\mathbf{abc}]$ を **Grassmann 記号**と呼ぶ.

³Oliver Heaviside (1850-1925) はイギリスの物理学者, 工学者である. 電信技術者として出発したが, 物理学者 Maxwell の目に留まり, その後電磁気学の研究に専心した. 有名な Clark Maxwell による電磁気学の基礎方程式は, Maxwell 本人の提示した元々のものは, 変数を 20 個もつ, 20 本の方程式からなる連立方程式であった (!!) が, Heaviside によってそれは 2 変数の 4 本の方程式に簡約された. 今日, 我々の言う『Maxwell の方程式』は, もちろん Heaviside の考えたものであるから, 『Maxwell-Heaviside の方程式』と呼ぶべきである, という意見もある. ただし, Heaviside の「数学的厳密さへの嫌悪」も有名で, 証明にはまったく興味を示さなかったという. 中学生の時に, 幾何 (もちろん「初等幾何」である) で赤点をクラッタ, という逸話がある.

4 再び、連立方程式へ.

以上で、3 次正方行列の行列式を定義する準備はすべて整った．そこで、我々のそもそもの出発点であるキングギドラ ゴジラ モスラ 算 (KGM problem) に話を戻し、一般の 3 次正方行列の行列式を——実は既に定義されているのだが——定義しよう．

3 元 1 次の連立方程式

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = k_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = k_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = k_3 \end{cases} \quad (5)$$

が与えられたとしよう．ここで、この方程式 (5) が、次の (6) に書き換えられることに注意しよう：

$$x \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}.$$

${}^T(a_1 \ a_2 \ a_3) = \mathbf{a}$, ..., ${}^T(k_1 \ k_2 \ k_3) = \mathbf{k}$ とすれば、これは

$$x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c} = \mathbf{k} \quad (6)$$

と書かれる．

読むな!

「読むな!」と言っておけば読んでくれるから、ここで読むなと言おう．先に進む前に、少くとも 30 秒、この式 (6) から y と z を一挙に消去する方法を考えること．

そのためには、 $\mathbf{b}$ と $\mathbf{c}$ のいずれにも垂直な vector を、両辺に内積として乗じればよいのだから、…… その結果左辺は $\mathbf{a}$ と …… との内積となるから、これって結局 ……
ハ コ セ ……

読んでよかったでしょ?...

その通りである．「読むな!」で読んで考えてくれた (?) ように、方程式 (6) から y, z を消去するために、 $\mathbf{b}$ と $\mathbf{c}$ のいずれにも垂直な vector として $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ を選び、それを両辺に内積として乗じると、 $\mathbf{b} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{o}$ であるから、

$$x\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{k} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

となる．同様にして、 x, z を消去するために $\mathbf{c} \times \mathbf{a}$ との、また x, y を消去するために $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ との、内積を作れば、次を得る：

$$y\mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{k} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}), \quad z\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{k} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}).$$

ここで、3 個の式の両辺はすべて vector 3 重積であることに注意すれば、THEOREM 3.3 (p.12) によってこれらは

$$[abc]x = [kbc], \quad [abc]y = [kca], \quad [abc]z = [kab]$$

と書かれる．ナント simple ナコトカ!

ここで, scalar 3 重積 $[abc]$ の値が 0 でないならば, この連立方程式 (6) は解をもち, それは

$$x = \frac{[kbc]}{[abc]}, \quad y = \frac{[kca]}{[abc]}, \quad z = \frac{[kab]}{[abc]} \quad (7)$$

である. また, その値が 0 ならば, この連立方程式の解は存在しないか, または定まらない. つまり,

scalar 3 重積が 0 でないこと, つまり $[abc] \neq 0$ は, 連立方程式 (6) が一意解 (unique solution) をもつための必要十分条件である. **これを行列式と言わずに, 何が行列式か!?**

行列, というと「成分計算」が常識になっている感がある. 嘆かわしいことである. そんなもの, 計算機端末に計算させればいいのに, わざわざ人間の手を煩わせるのが高校数学らしい. もっと有意義な時間の使い方があるはずだ……. と言いたいところだが, やはり一度は見ておこう. 次のようになる:

$$\begin{aligned}
 [abc] &= \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \\
 &= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) \\
 &= a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - (a_1b_3c_2 + a_2b_1c_3 + a_3b_2c_1).
 \end{aligned} \quad (8)$$

これを, 2 次の正方行列の場合と同様に, 3 次正方行列の**行列式 (determinant)** と言い,

$$\det \mathbf{A}, \quad \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

で表わす. 計算式 (8) の最後の展開式を見れば, 行列の左上から右下に向かう成分の積には + を, また右上から左下に向かう成分の積には - をつけて, 総和を作ったものが, 3 次の正方行列の行列式になる. この式を「サラスの公式」とかヌカシてエバッテいるのを見かけるが, 何が嬉しいのか解らない. きっと九九以外に遊びのない生活を送っているのだろう. 気の毒といえば気の毒だが, 数学を志すべきではなかろう⁴.

また, 方程式 (6) の解 (7) について, scalar 3 重積が巡回置換によって不変に保たれることを用いれば, 解 (7) は次の形に書ける. 分子に注意されたい:

$$x = \frac{[kbc]}{[abc]}, \quad y = \frac{[akc]}{[abc]}, \quad z = \frac{[abk]}{[abc]}. \quad (9)$$

これまでに得られた結果を定理としてまとめておこう.

THEOREM 4.1 (Cramer's Formula in $\mathbb{R}^3$)

3 個の列 vector $\mathbf{a} = {}^T(a_1a_2a_3)$, $\mathbf{b} = {}^T(b_1b_2b_3)$, $\mathbf{c} = {}^T(c_1c_2c_3)$ を, 横に並べてできる行列 $\mathbf{A} = (\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c})$ について, その行列式 $\det \mathbf{A}$ はそれら 3 個の vector の scalar 3 重積に

⁴例えば石原茂, 竹村由也『解析幾何』森北出版, 1993. **何があっても買ってはならない.** この本の中心部分である p.88 から p.100 に誤植が 17 箇所ある. このような, 学生の学ぶ気をすべて無にする出版物が, 書店に溢れているこの国で, タコ官僚が「理系離れ」を憂えているという。「学生が理系離れて」いるのではなく、「教える側が理系離れさせて」いるのだ.

他ならない：

$$\det A = [\mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{c}] = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right).$$

これを成分で表せば

$$\det A = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

となる．この右边を「 $\det A$ の第 1 列に関する展開」と言う．

$\det A \neq 0$ のとき，連立方程式 (6) は一意解 (9) をもつ．これを連立方程式 (6) についての **Cramer の公式** (*Cramer's Rule*) と言う⁵．成分で書けば， $x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c} = \mathbf{k}$ の解は， $\mathbf{k} = {}^T(k_1 k_2 k_3)$ として

$$x = \frac{\begin{vmatrix} k_1 & b_1 & c_1 \\ k_2 & b_2 & c_2 \\ k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & k_1 & c_1 \\ a_2 & k_2 & c_2 \\ a_3 & k_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & k_1 \\ a_2 & b_2 & k_2 \\ a_3 & b_3 & k_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

となる．

5 吾人，今や進ンデ...

我々はかくして，世紀の難問『キングギドラ ゴジラ モスラ算』を解決できる地平に到達した．思えば長い旅程であった (..... ホントカヨ?). この論考で獲得されたすべての理論的諸内容を余すところなく駆使することをもって，人間精神の栄誉のために，この問題に人類の英知の光を当てよう．

Solution of KGM Problem.

世紀ノ難問ニ挑マントス．きんぐぎどらさんべくとる，ごぢらくんべくとる，もすらちゃんべくとるヲソレゾレ $\mathbf{k} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ， $\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ ， $\mathbf{m} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ トシ，き，ご，もカラナルべくとる 3 項列 (vot) ニ

⁵Gabriel Cramer (1704-1752) はスイスで生まれフランスで没した数学者．時の数学の Super Star 達，Johann Bernoulli, Euler, Daniel Bernoulli, Halley, de Moivre, Stirling 等との交流の中で，多くの研究を残した．Cramer については，§.6 Historical Note(p. 16) で多少詳しく採り挙げる．

対応セルけーすーぎゃうれつヲ **け** = (きごも), ソノぎゃうれつしきヲ **で** = det **け**, マタてーすー
 こーべくとるヲ **て** = $\begin{pmatrix} 18 \\ 52 \\ 16 \end{pmatrix}$ ト定メン.

欲スル解ヲ (x, y, z) トスレバ, 是ニ依リテ KGM Problem ハ方程式

$$x \text{ き} + y \text{ ご} + z \text{ も} = \text{て} \quad (10)$$

ニ帰着スルコト明ラカナリ. 加ヘテ, 3 ぢせいはうぎゃうれつ **け** = (きごも) ノぎゃうれつしき
で = det **け** ハ, すからあ 3 重積 [きごも] デアルコト, 既ニ我々ノ知ル処ナリ. ソレ, ごちらくんべ
 くとるトもすらちゃんべくとるノ外積トきんぐぎどらさんべくとるトノ内積トシテ得ラレリ. 依ッテ

$$\text{で} = \det \text{け} = [\text{きごも}] = \text{き} \cdot (\text{ご} \times \text{も})$$

デアリ, モシ det **け** = 0 ナラザレバ, 方程式 (10) ノ解, 是 Cramer's Rule ニ依リテ

$$x = \frac{[\text{てごも}]}{[\text{きごも}]}, \quad y = \frac{[\text{きても}]}{[\text{きごも}]}, \quad z = \frac{[\text{きごて}]}{[\text{きごも}]} \quad (11)$$

トナレリ.

計算ノ細部ハ読者諸賢ニ委ネ (諸賢ハ九九トタシ算ヲ計算機端末ニ委ネヨ. 任意ノ言語デ 3 ぢノせ
 いはうぎゃうれつノぎゃうれつしきヲ求メル program ヲ書カレルガヨイ), 吾人結果ヲ以下ニ示サン:

$$\begin{aligned} \text{で} = \det \text{け} &= [\text{きごも}] = \text{き} \cdot (\text{ご} \times \text{も}) = 24, \\ [\text{てごも}] &= \text{て} \cdot (\text{ご} \times \text{も}) = 72, \\ [\text{きても}] &= [\text{てもき}] = \text{て} \cdot (\text{も} \times \text{き}) = 96, \\ [\text{きごて}] &= [\text{てきご}] = \text{て} \cdot (\text{き} \times \text{ご}) = 120. \end{aligned}$$

カクシテ, KGM Problem (10) ハ (11) ニ依リテ $x = 3, y = 4, z = 5$ ヲ解ニモチ, きんぎぎどらさ
 んハ 3 羽, ごちらくんハ 4 頭, もすらちゃんハ 5 匹デアルコト, コレ解也. ■

6 Historical Note

我々の数学に Cramer's Rule が登場するのは 18 世紀のことである⁶. まず, Colin Maclaurin (ド
 コカデ聴いたような...) が 1748 年に未知数が 2 つと 3 つの場合の式を, 著書 *A Treatise of Algebra,*
In Three Parts. (London, 1748) において発表する. その部分を次の Figure 10 に挙げる.

最初の単語は “Suppose” であり, 最後の行は “Then shall $z = \dots$ ” である. このころ, S の
 小文字は, イギリスとフランスではこのように書かれることが多かった. (画像は Internet Archive,
 Americana Collection に置かれている pdf file を加工した. ただし, 6th Edition, 1796 である.)

⁶実は, 更に早く, 和算家 関 孝和 が 17 世紀に同値な結果を与えている. 『解伏題之法』(1683) という著書においてらしい. 「伏題」というのが連立方程式を意味するという. ただし, 筆者 kymst にとって和算は「我々の数学」ではない. 関 孝和
 が偉大なのは認めるし, 彼はちゃんとそれを公にしたからいいとしても, 答, ないし結果を得て, それを公表せずに神社仏閣
 に奉納する, というのは, 筆者の考えるところでは, 学知を得ようとする試行錯誤たる学問としての人間的営為ではないから
 である. どこかのクタバリゴノナイが, 「和算は芸術である」としたり顔でほざいているが, この「芸術」は「非学問」という
 意味なのであろう.

Figure 10: Maclaurin, p.83.

THEOREM II.

§ 87. Suppose now that there are three unknown quantities and three equations, then call the unknown quantities x , y , and z .

$$\text{Thus } \begin{cases} ax + by + cz = m \\ dx + ey + fz = n \\ gx + hy + iz = p \end{cases}$$

$$\text{Then shall } z = \frac{acp - ahn + dhm - dbp + gbn - gem}{ack - ahf + dhc - dbk + gbf - gec}$$

それから 2 年後, スイスの数学者 Gabriel Cramer (1704-1752) が, その著書 *INTRODUCTION A L'ANALYSE des LIGNES COURBES ALGÈBRIQUES* (「代数的曲線の解析への入門」), Geneve, 1750 を公にする. その中で, 5 点を通る一般 2 次曲線 $x^2 + 2hxy + by^2 + 2fx + 2gy + c = 0$ の係数を決定するために, 5 元 1 次連立方程式を解く必要から, 連立方程式の解法の一般的な規則を, 巻末の Appendix (付録) No.1 で考察した (pp. 657-659). 以下は, その部分の訳である. 多分, 日本語に訳されるのはこれが最初であると思われる. [...] は, kymst による補足である. また, 対応する部分に原著を scan した画像を貼ってみた. なにしろ 1750 年の本である. 多少, 画像が滲んでいるのは大目に見て欲しい.

筆者 kymst がこの本に access することを可能にしてくれた, 当時 (2009) W 大学修士課程の院生であった T., Y. 君, また様々な作業を労を惜しまず引き受けてくれた Tokyo Tech 学部生 S., K. 君, そして作業を取り仕切ってくれた, 歳若き友人 seiya さんに感謝する. それと同時に, こうした 250 年以上前の稀覯本を, 一般の貸し出し可能な書籍にしていた W 大学の勇気と野蛮を賞賛し, 心からの敬意を表したい.

Gabriel Cramer: *INTRODUCTION A L'ANALYSE des LIGNES COURBES ALGÈBRIQUES*. (1750, Geneve.)

Appendice No.1. (pp.657-659)

未知数 z, y, x, v , etc. をもつ方程式

$$A^1 = Z^1 z + Y^1 y + X^1 x + V^1 v + \text{etc.}$$

$$A^2 = Z^2 z + Y^2 y + X^2 x + V^2 v + \text{etc.}$$

$$A^3 = Z^3 z + Y^3 y + X^3 x + V^3 v + \text{etc.}$$

$$A^4 = Z^4 z + Y^4 y + X^4 x + V^4 v + \text{etc.}$$

etc.

Soient plusieurs inconnues z, y, x, v , etc. & autant d'équations

$$\begin{aligned} A^1 &= Z^1 z + Y^1 y + X^1 x + V^1 v + \dots \\ A^2 &= Z^2 z + Y^2 y + X^2 x + V^2 v + \dots \\ A^3 &= Z^3 z + Y^3 y + X^3 x + V^3 v + \dots \\ A^4 &= Z^4 z + Y^4 y + X^4 x + V^4 v + \dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

が与えられたとする. ここで A^1, A^2, A^3, A^4 , etc. は, 通常のように A のべきを表わすのではなく, ただ 1 番目, 2 番目, 3 番目, 4 番目, etc. の方程式の第 1 辺 [左辺, 定数項] を表すものとする. 同様に, Z^1, Z^2 , etc. は 1 番目, 2 番目, etc. の方程式における z の係数を, Y^1, Y^2 , etc. は y の, X^1, X^2 , etc. は x の, V^1, V^2 , etc. は v の, それぞれの方程式における係数である.

この表記法によれば, ただ 1 つの未知数 z をもつただ 1 つの方程式ならば [それは $A^1 = Z^1 z$ であり, その解として] $z = \frac{A^1}{Z^1}$ を得る. もし 2 つの未知数 z と y をもつ 2 つの方程式が与えられたならば, [その解は] $z = \frac{A^1 Y^2 - A^2 Y^1}{Z^1 Y^2 - Z^2 Y^1}$, $y = \frac{Z^1 A^2 - Z^2 A^1}{Z^1 Y^2 - Z^2 Y^1}$ であり, もし 3 つの未知数 z, y, x をもつ 3 つの方程式が与えられたならば, [その解は]

$$\begin{aligned} z &= \frac{A^1 Y^2 X^3 - A^1 Y^3 X^2 - A^2 Y^1 X^3 + A^2 Y^3 X^1 + A^3 Y^1 X^2 - A^3 Y^2 X^1}{Z^1 Y^2 X^3 - Z^1 Y^3 X^2 - Z^2 Y^1 X^3 + Z^2 Y^3 X^1 + Z^3 Y^1 X^2 - Z^3 Y^2 X^1}, \\ y &= \frac{Z^1 A^2 X^3 - Z^1 A^3 X^2 - Z^2 A^1 X^3 + Z^2 A^3 X^1 + Z^3 A^1 X^2 - Z^3 A^2 X^1}{Z^1 Y^2 X^3 - Z^1 Y^3 X^2 - Z^2 Y^1 X^3 + Z^2 Y^3 X^1 + Z^3 Y^1 X^2 - Z^3 Y^2 X^1}, \\ x &= \frac{Z^1 Y^2 A^3 - Z^1 Y^3 A^2 - Z^2 Y^1 A^3 + Z^2 Y^3 A^1 + Z^3 Y^1 A^2 - Z^3 Y^2 A^1}{Z^1 Y^2 X^3 - Z^1 Y^3 X^2 - Z^2 Y^1 X^3 + Z^2 Y^3 X^1 + Z^3 Y^1 X^2 - Z^3 Y^2 X^1} \end{aligned}$$

である.

$$\begin{aligned} z &= \frac{A^1 Y^2 X^3 - A^1 Y^3 X^2 - A^2 Y^1 X^3 + A^2 Y^3 X^1 + A^3 Y^1 X^2 - A^3 Y^2 X^1}{Z^1 Y^2 X^3 - Z^1 Y^3 X^2 - Z^2 Y^1 X^3 + Z^2 Y^3 X^1 + Z^3 Y^1 X^2 - Z^3 Y^2 X^1}, \\ y &= \frac{Z^1 A^2 X^3 - Z^1 A^3 X^2 - Z^2 A^1 X^3 + Z^2 A^3 X^1 + Z^3 A^1 X^2 - Z^3 A^2 X^1}{Z^1 Y^2 X^3 - Z^1 Y^3 X^2 - Z^2 Y^1 X^3 + Z^2 Y^3 X^1 + Z^3 Y^1 X^2 - Z^3 Y^2 X^1}, \\ x &= \frac{Z^1 Y^2 A^3 - Z^1 Y^3 A^2 - Z^2 Y^1 A^3 + Z^2 Y^3 A^1 + Z^3 Y^1 A^2 - Z^3 Y^2 A^1}{Z^1 Y^2 X^3 - Z^1 Y^3 X^2 - Z^2 Y^1 X^3 + Z^2 Y^3 X^1 + Z^3 Y^1 X^2 - Z^3 Y^2 X^1} \end{aligned}$$

これらの式を検討することによって, 次の一般的な規則を得る (L'examen de des Formulas fournit cette Règle générale)[強調は kymst による]: 未知数の個数も方程式の本数も n であるとして, 未知数の値は全部で n 個の分数になるが, その分母はすべて, n 個の異なるものの並べ代え [異なる n 個のものの順列] の個数と同じ個数 [$n!$ 個] の項から成る. そのそれぞれの項は, 文字 $ZYXV$ etc. から成っていて, すべて同じ順序で並んでいる. このそれぞれの項に, 1 から n までの正整数を, すべての可能な並べ方で並べたものを, その指数 [つまり upper index] として配分する. 例えば未知数が 3 個の場合には, 分母は 3 個の文字 ZYX からなる $6(=3!)$ 個の項をもつが, これら 6 個の項には, 順に指

数 123, 132, 213, 231, 312, 321 が配分される. そしてこれら各項に, + または - の符号を次の規則によってあてがう:

ある 1 つの項において, ある文字に, その直後であろうとまたはいくつか離れた後であろうと, その文字の指数よりも小さい指数をもつ文字が出現するとき, それを**逆転** (*dérangement*) と呼ぼう.

それぞれの項において, すべての文字がもつ逆転の個数の合計を求める. その逆転の個数が偶数または 0 であるときには, その項には符号 + を, また奇数のときには符号 - を, あてがう.

例えば, 項 $Z^1Y^2X^3$ には逆転は存在しないから, 符号は + である. また $Z^3Y^1X^2$ は (3, 1) と (3, 2) という 2 個の逆転をもつから, やはり符号は + である. それに対して, 項 $Z^3Y^2X^1$ には (3, 2), (3, 1), (2, 1) という 3 個の逆転があるから, その符号は - となる.

このように作られた分母から, その分母のすべての項で Z を A に取り代えて分子を作り, この分子を分母で割れば, [未知数] z の値を得る. また y の値は, 分母のすべての項で, Y を A に取り代えて分子を作り, 同じ分母で割ることによって得られる. 他の未知数の値についても, これとまったく同様のやり方でその値を得ることができる.

一般的に言えば, [連立方程式] 問題は, [その解が一意解として] 確定す (*le Problème est déterminé.*)[ればそれで解かれたことにな] る. しかし, 特別な場合がまだ残っている. それは, 方程式が不定 (*indéterminé*) である場合と, もう 1 つは不能 (*impossible*) になってしまう場合である. このいずれも, 共通な分母の値が 0 になるときである. 例えば, 2 元の方程式ならば

$$Z^1Y^2 - Z^2Y^1 = 0,$$

3 元の方程式ならば,

$$Z^1Y^2X^3 - Z^1Y^3X^2 - Z^2Y^1X^3 + Z^2Y^3X^1 + Z^3Y^1X^2 - Z^3Y^2X^1 = 0$$

である.

こうした場合に, もし A^1, A^2, A^3 etc. などの量 [定数項] が, 分子をも 0 にしてしまうようなものであるならば, この問題 [連立方程式] は不定となる. 何故なら, 未知数の値を与えるべき分数が $\frac{0}{0}$ となり, その値が定まらないからである.

これに対して, 共通な分母が 0 であって, なおかつ分子のいくつかかが 0 でないならば, 問題 [連立方程式] は不能になる. つまり, 定数項 A^1, A^2, A^3 etc. が, 方程式の解たりうる未知数の値の全て, あるいはその一部, を無限大にしまうようなものであるときである.

例として, 2 元連立方程式

$$\begin{cases} 2 &= 3z - 2y, \\ 5 &= 6z - 4y \end{cases}$$

を採り挙げよう. これを解いて $z = \frac{2}{0}, y = \frac{3}{0}$ を得る⁷. 従って, z, y はいずれも無限大であり, かつその比が $2:3$ である様な量 (*des grandeurs infinies, qui sont l'une à l'autre en raison de 2 à 3*) である.

ところが, 普通の方法によって未知数を消去すれば, $\frac{2}{3} = \frac{5}{6}$ という矛盾が生じる. 何故なら, 第 1 式から $z = \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}$, 第 2 式から $z = \frac{4}{6}y + \frac{5}{6}$ であるから, $\frac{2}{3}y + \frac{2}{3} = \frac{4}{6}y + \frac{5}{6}$, つまり $\frac{2}{3} = \frac{5}{6}$ となるからである.

確かに, これは, もし z と y が有限な量であるとすれば不合理である (*ce qui est absurde, si z et y sont des grandeurs finies*). しかし, これらが無限大であるとすれば, 一切の不合理なしに (*Mais si elles sont infinies, on peut dire sans absurdité que ...*) $z = \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}$ であると同時に, $z = \frac{2}{3}y + \frac{5}{6}$ であると主張することが可能である. 何故なら, 有限な量 $\frac{2}{3}, \frac{5}{6}$ は, 無限大である z や $\frac{2}{3}y$ に比較すればなにに等しい (*les grandeurs finies ... n'étant rien en comparaison des grandeurs infinies ...*) から, 2 つの方程式

$$z = \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}, z = \frac{2}{3}y + \frac{5}{6}$$

のいずれも, 何一つ矛盾を含むことのない $z = \frac{2}{3}y$ へと帰されるからである.

Translated by kymst.

拙い訳であったが, 既に触れたように, あまり目にするのできない文献であることは確かである. 自分の語学力を振り返ることなく, 敢えて蛮勇を奮って訳してみた.

尚, この Cramer の結果が一般的規則としての Cramer's Rule と呼ばれるのは, その十数年後, ベズー (Étienne Bézout (1730-1783)) が 1764 に『フランス王立科学アカデミー紀要』で発表した, 方程式の未知数の消去と終結式の次数について考察した論文

RECHERCHES SUR LE DEGRÉ DES ÉQUATIONS RÉSULTANTES DE L'ÉVANOUISSEMENT DES INCONNUES, Et sur les moyens qu'il convient d'employer pour trouver ces Équations.

Histoire de l'Académie royale des sciences avec les mémoires de mathématique et de physique tirés des registres de cette Académie, Année M.DCCLXIV, pp.288-338 (1764, Paris)

⁷これは, 我々の表記によれば

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \therefore z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{2}{0}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{3}{0}$$

ということである. 行列及び行列式の表記は, この時代にはない (19 世紀を待つて初めて登場する). kymst による捏造である. 以下の Cramer による言葉使いが, どれほど我々のそれと異なるか, 注意して読むこと. このような, 時代と文化に対する多視点的数学観を身につけて欲しい, そうすれば「無限に大きな n 」などという矛盾に陥らないで済む... それとも, nonstandard analysis でやったのかな? (一部にのみ通用する gag です. 気にしないで下さい.)

の冒頭 (p. 291) において

クラメル氏はこれらの因子をすべて消去した整式を表わす**一般的な規則**を与えた

M. Cramer a donné *une règle générale* pour exprimer toutes débarrassées de ce facteur

という証言が最初であるらしい (強調は kymst による). それを認めた上で, Bézout は次の式を挙げ
る (ib. p.293) :

$$\begin{aligned}
 & a' b' - a' b = 0, \\
 & (a' b' - a' b) c'' + (a'' b - a' b') c' + (a' b'' - a'' b') c = 0, \\
 & [(a' b' - a' b) c'' + (a'' b - a' b') c' + (a' b'' - a'' b') c] d''' \\
 & + [(a' b' - a' b') c'' + (a' b'' - a'' b) c' + (a'' b' - a' b'') c] d'' \\
 & + [(a'' b - a' b'') c'' + (a' b'' - a'' b) c' + (a'' b'' - a' b'') c] d' \\
 & + [(a' b'' - a'' b') c'' + (a'' b'' - a' b'') c' + (a' b' - a' b'') c] d = 0.
 \end{aligned}$$

行列式の帰納的定義, 再帰規則の明示である. ここに数学の数学たる本来の姿を垣間見る気がする
のは, 筆者 kymst の西洋偏愛, 東洋嫌悪のせいだけではあるまい.

かくして, 我々の行列論は, 3 次元空間の壁を突き破るところまで来た... と言いたいところでは
あるが, 肝心の逆行列がどうなるのか, まだ述べられていない. 次に執筆予定の **Math Jotter of
kymst New Series, No. A3** では, もう少し 3 次の正方行列に立ち入ってみたい. 具体的には, キ
チンとした形で逆行列を整理し, 更にその固有多項式や固有値, 固有 vector などを考察する. 思う
に, 3 から 4 へ, 4 から 5 へ, 上昇するのは, 2 から 3 への跳躍に比べて容易である. $\mathbb{K}^3$, あるいは
 $\mathbb{R}^3$ の世界を彷徨することは, 我々にとって生の現場で数学を行なうことに他ならぬ. 今少し, つき
あって欲しいと思う.

残念ながら, Grassmann (1809-1877) について触れることができなかった. Schubring [Sch96] が網羅
的な研究を行なっている. また, vector 解析一般については, 記述の仕方が多少古めかしい感はあるに
せよ, Brand [Bra06] から学んだところが大きい. 更に, その歴史的な側面については, Crowe [Cro94]
に詳しい.

References

- [Bra06] Louis Brand. *Vector Analysis*. Dover, 2006. orig: 1957 Wiley & Sons, New York.
- [Cro94] Michael J. Crowe. *A History of Vector Analysis. — The Evolution of the Idea of a Vectorial System*. Dover, 1994. orig. 1967, University of Notre Dame Press.
- [Sch96] Gert Schubring, editor. *Hermann Guenther Grassmann (1809-1877). Visionary Mathematician, Scientist and Neohumanist Scholar. Papers from a Sequicentennial Conference*. No. 187 in Boston Studies in the Philosophy of Science. Kluwer, 1996.

この document を執筆するに当たり, 次のような WEB page を参考にさせて頂きました. 心から
感謝します.

- O'Connor, John J. / Robertson, Edmund F.: *The MacTutor History of Mathematics Archive*.
<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/index.html>
- Miller, Jeff (maintainer): *Earliest Known Uses of Some of the Words of Mathematics*.
<http://jeff560.tripod.com/mathword.html>

また, Grassmann, Heaviside, Bézout らの文献は, 次の WEB 上の Archive で閲覧可能です:

- GDZ: <http://gdz.sub.uni-goettingen.de/>
- Gallica: <http://gallica.bnf.fr/>
- Michigan: <http://quod.lib.umich.edu/>
- Internet Archive: <http://www.archive.org/>

この document を作成するに当たって, 特に外積の加法への分配性に関する証明について, Tokyo Tech の mirai さんと kouta さんから, 有益な示唆を頂いた. mirai さんは現在, 博士課程に席を置き, Operations Research を中心とする応用数学の研鑽を積んでおられる. また, kouta さんは今後代数学を専攻しようとしている数学科学部生である.

アラカン (Around KANREKI) の身でありながら, この様な若い人達と数学上の交流がもてるのは, 筆者にとって望外の喜びである... で終れば, カワイイオジーチャンで幕が閉じてカーテンコール, というところであろうが, そこは, やはりヘソマ加里頑固ジジィとしての identity は保ちたい:

マダマダ, 若イモンニ負ケテタルカ!

... とは言え, 2 人とも, 本当にありがとう.

kymst. Tue Sep 13 11:50:17 2011 JST