New Series, No.**C-16**. version Apr. 2011.

双曲線関数

Article by YAMASHITA, Koichiro.

ⓒMJKns(2011-) Calculus-16. Sat Apr 16 11:38:00 2011 JST

1 双曲線関数について

ときどき，微積の問題で $f\left(x\right)=\dfrac{\mathbf{e}^{x}+\mathbf{e}^{-x}}{2}$ とか $g\left(x\right)=\dfrac{\mathbf{e}^{x}-\mathbf{e}^{-x}}{2}$ などの関数を目にする．今回の **MATH Jotter of** `kymst` では，これらの関数について考察してみよう．

1.1 基本性質 — 元祖との比較

まず (シラバックレテ)，次のように定義する；

$$C\left(t\right)\overset{\text{def}}{=}\frac{\mathbf{e}^{t}+\mathbf{e}^{-t}}{2},\quad S\left(t\right)\overset{\text{def}}{=}\frac{\mathbf{e}^{t}-\mathbf{e}^{-t}}{2}.$$

$\{C\left(t\right)\}^2$ を $C^2(t)$ と書く．$S\left(t\right)$ についても同様．次が成り立つことは明らかであろう；

$$C^2(t)-S^2(t)=\frac{1}{4}\left\{\left(\mathbf{e}^{t}+\mathbf{e}^{-t}\right)^2-\left(\mathbf{e}^{t}-\mathbf{e}^{-t}\right)^2\right\}=\frac{1}{4}\cdot(2+2)=1. \tag{1}$$

さらに，$C\left(-t\right)=C\left(t\right)$, $S\left(-t\right)=-S\left(t\right)$ であるから，$C\left(t\right)$ は偶関数 (*even function*)，$S\left(t\right)$ は奇関数 (*odd f.*) である．

次の計算を見てくれれば，C とか S とかで**何ヲシラバックレタノカ**，解るはずである；

$$\begin{aligned}
C\left(\alpha+\beta\right)&=\frac{1}{2}\left(\mathbf{e}^{\alpha}\mathbf{e}^{\beta}+\mathbf{e}^{-\alpha}\mathbf{e}^{-\beta}\right)\\
&=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left\{\left(\mathbf{e}^{\alpha}+\mathbf{e}^{-\alpha}\right)\left(\mathbf{e}^{\beta}+\mathbf{e}^{-\beta}\right)+\left(\mathbf{e}^{\alpha}-\mathbf{e}^{-\alpha}\right)\left(\mathbf{e}^{\beta}-\mathbf{e}^{-\beta}\right)\right\}\\
&=C\left(\alpha\right)C\left(\beta\right)+S\left(\alpha\right)S\left(\beta\right),\\
S\left(\alpha+\beta\right)&=S\left(\alpha\right)C\left(\beta\right)+C\left(\alpha\right)S\left(\beta\right)\ \ldots\ldots
\end{aligned}$$

...... その通り，まさしくこれは**加法定理ソノモノ**ではないか!! さらに，符号を見る限り，元祖加法定理，つまり円関数 sin, cos の加法定理よりタチがよさそうである．

更に，この関数 $C\left(t\right)$，$S\left(t\right)$ の導関数を求めてみると

$$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathbf{e}^{t}-\mathbf{e}^{-t}}{2}=S\left(t\right),\quad \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathbf{e}^{t}+\mathbf{e}^{-t}}{2}=C\left(t\right)$$

となる．なるほど，本家の円関数よりスナオである．

この関数 $C\,(t)$ や $S\,(t)$ を**双曲線関数** (*hyperbolic function*) と言う．この名の由来は，式 (1) を見れば明らかであろう．$x = C\,(t)$，$y = S\,(t)$ と置くことにより，直角双曲線 $\mathscr{H}\colon x^2 - y^2 = 1$ 上の点を，t を parameter として表せるからである[1].

そこで，改めて

$$\cosh t \overset{\text{def}}{=} \frac{\mathbf{e}^t + \mathbf{e}^{-t}}{2}, \quad \sinh t \overset{\text{def}}{=} \frac{\mathbf{e}^t - \mathbf{e}^{-t}}{2}$$

と定義して，それぞれ “hyperbolic sine, hyperbolic cosine” と呼ぶ．$x = \cosh t$, $y = \sinh t$ と，$\frac{\mathbf{e}^t}{2}$，$\frac{\mathbf{e}^{-t}}{2}$ の graph を Figure 1 (p. 2) に示した.

Figure 1: Hyperbolic functions

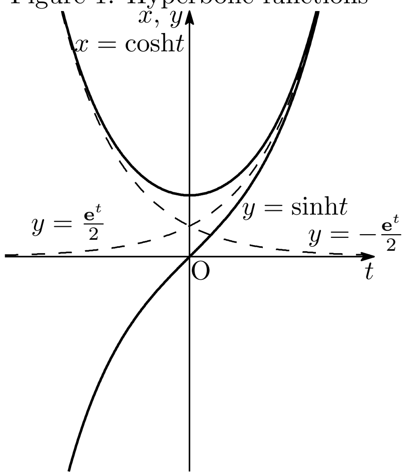
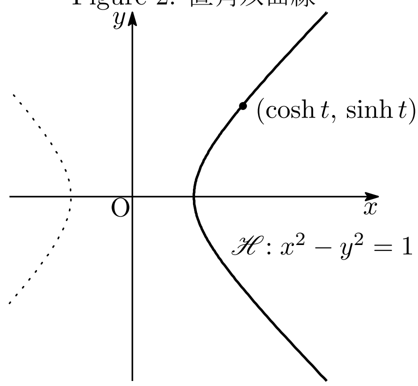


Figure 2: 直角双曲線



また，t が $\mathbb{R}$ 全体を動くとき，$y = \sinh t$ はやはり $\mathbb{R}$ 全体を動くが，$x = \cosh t$ は $x \geq 1$ を値域とする．従って，点 $(\cosh t, \sinh t)$ は直角双曲線 $\mathscr{H}\colon x^2 - y^2 = 1$ の右分岐を描く．Figure 2 (p. 2) を見られたい.

2　双曲線関数の逆関数

$y = \sinh t$ は $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への全単射であるから，その逆関数が定義されるのは当然であるが，$x = \cosh t$ についても，定義域を $x \geq 1$ に制限し，さらに 2 つの分岐に分けることによって逆関数を考えることができる．$x = \cosh t$, $y = \sinh t$ の逆関数をそれぞれ $t = \operatorname{arcosh} x$, $t = \operatorname{arsinh} y$ で表し，**逆双曲線関数** (*inverses of hyperbolic function*) と呼ぶ[2].

[1]...... いや，罔侮禍愕省の定めた高校数学内部では明らかではない．本家の sin や cos を三角関数などという前近代的な名で呼んでいる限り，これを「双曲線関数」と呼ぶことに内在する偉大な思考の飛躍 — 平面曲線を「数曲線」として扱うこと — は，我々の視界から逃げ去る．官製の数学における思想性の欠如! 知の自立への弾圧!! **成熟し得ぬ文化による似非教育は，成熟を目指すことを忘れた痴呆学生との蜜月を夢見る!!!**

[2]まれに，というか，一昔前までは，これらを $\cosh^{-1} t$, $\sinh^{-1} t$ という書き方をしている書物を見ることが多かった．今日でもときどき見かける．従って，円関数の逆関数も $\cos^{-1}$, $\sin^{-1}$ となる．これはヒドイ! 関数 f に関してその逆関数を f^{-1} と表すから，それに揃えたのであろうが，cos や sin，そしてその兄弟としての cosh, sinh については，例えば $(\cos\theta)^2$ を $\cos^2\theta$ と表すよう，我々は習慣づけられている.「他の整数の場合はべき乗であるが，-1 の場合だけは例外である」というのは，教える側の横暴でしかない.

arcosh, arcsin は “arccosh”, “arcsinh” と書かれることもある．実際,「出版物は権威ある図書館や研究室に置かれるべきであって，学生の財布の中身などどうでもよい」と思っている (であろう)『学問の殿堂』岩波書店刊行の『岩波数学辞典』第 4 版 (2007) の記号表 (p.26) でもこうなっている．他方で，ISO (国際標準化機構 the International Organization for Standardization) という機関があり，そこでは，この document で用いられている，‘c’ 抜きの記法 arcosh, arsinh が定められている．

これまで `kymst` も,「arccosh t というのはあまりに長いから，“c” を抜くことにしたんだろう．じゃ読むときも (あまり利口そうに聞こえないが)，**“あ〜はいこす”** とか **“あ〜はいさい”** とでも読んでおけばいいか······」程度にしか思っていなかった．事実，“arc hyperbolic cosine”，“arc hyperbolic sine” と読む同業者 (つまりある種の変人 · 奇人) も多い．現在，アンケートを実施して結果を集計中である．

チガッタ !! この “arccosh, arcsinh” という記号も，またそれを「アーク」と読む読み方も，完全に誤っている．この誤りは，この国の数学教育のかなりな深みにまで蔓延していて，多くの，というよりほとんどの，解析学の教科書が誤った記法 “arccosh, arcsinh” を用いている.『岩波数学辞典』はその氷山の一角に過ぎない．やはり岩波の『数学入門辞典』(2005) も同様である．

この “c” のあるなしに，**円関数と双曲線関数の同一性と差異性**，**区別と連関が垣間見える**のである．やはり，高木貞治はエラカッタ······.「何のことだかワカラン」？ マァマァ，§4 まで待たれよ．

本題に戻ろう．まず，双曲的余弦の逆関数から．

$$x = \cosh t = \frac{\mathbf{e}^t + \mathbf{e}^{-t}}{2}$$

において，$\mathbf{e}^t = u$ とすれば $u + u^{-1} = 2x$, $u \cdot u^{-1} = 1$ であるから，u と u^{-1} は 2 次方程式 $\tau^2 - 2x\tau + 1 = 0$ の解となる．これを解けば

$$u,\, u^{-1} = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$$

を得る．$u = \mathbf{e}^t$ であり，複号の負の方も真数条件をみたすことから，

$$t = \ln u = \ln\left(x \pm \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

となる．これが $x = \cosh t$ の逆関数である．真数が互いの逆数であることにより，対数を作ったとき正負が逆で絶対値が等しい．これが，$x = \cosh t \iff t = \operatorname{arcosh} x$ の graph が x 軸に関して対称性をもつことの意味である．

次に，arsinh を考えよう．

$$y = \sinh t = \frac{\mathbf{e}^t - \mathbf{e}^{-t}}{2}$$

において同様に $\mathbf{e}^t = v$ とすれば $-\mathbf{e}^{-t} = -v^{-1}$ であるから，$v + \left(-v^{-1}\right) = 2y$, $v \cdot \left(-v^{-1}\right) = -1$ となり，v と $-v^{-1}$ は 2 次方程式 $\sigma^2 - 2y\sigma - 1 = 0$ の解である．これを解いて

$$v,\, -v^{-1} = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$$

を得るが，$v = e^t > 0$ であるから，この場合には $v = y + \sqrt{y^2 + 1}$ に定まってしまう (他の解は $-v^{-1}$ を表すが，これは $v = y + \sqrt{y^2 + 1}$ と同値である．確かめよ)．そこで対数を用いて t について解けば

$$t = \ln v = \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right)$$

を得る．これで $\operatorname{arsinh} y$ も求められた．定理としてまとめておこう．

THEOREM 2.1 (双曲線関数の逆関数)

双曲線関数について，次が成り立つ；

- $x = \cosh t$ は逆関数 $t = \operatorname{arcosh} x = \ln\left(x \pm \sqrt{x^2-1}\right)$ をもつ．この定義域は $x \geq 1$ であり，複号は x 軸に関して対称な 2 つの分岐に対応する．それぞれ正分岐，負分岐と言う．
- $y = \sinh t$ は逆関数 $t = \operatorname{arsinh} y = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$ をもつ．定義域は実数全体 $\mathbb{R}$ である．■

ところで，どこかで次のような話があったような気がするのだが ……

> 関数 $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(\mathbf{e}^x + \mathbf{e}^{-x}\right)$ (ただし $x > 0$) の逆関数を $g(x)$ とする．このとき，$g'(x)$ を求めよ．

そうなのだ，この $g(x)$ とは $\operatorname{arcosh} x$ の正分岐そのものである．我々の言い方に翻訳しよう．

> 双曲的余弦 $x = \dfrac{\mathbf{e}^t + \mathbf{e}^{-t}}{2}$ の右分岐の逆関数を $t = \operatorname{arcosh}_+ x$ とする．この導関数 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{arcosh}_+ x$ を求めよ．

ヘイヘイ，求めましょう．$\operatorname{arcosh}_+ x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$ であることを，我々はもう知っている．従って

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{arcosh}_+ x &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \\
&= \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}\right) \\
&= \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.
\end{aligned}$$

これが，あの問題の意味であったのだよ，諸君．

3 parameter t の意味

いよいよ最後の話題である．$\cosh t = \dfrac{\mathbf{e}^t + \mathbf{e}^{-t}}{2}$，$\sinh t = \dfrac{\mathbf{e}^t - \mathbf{e}^{-t}}{2}$ が，円関数 $\cos\theta$，$\sin\theta$ と極めて近い振舞いをすることを我々は知った．しかし，円関数の場合には，変数 θ は単位円 $\mathscr{U}$ における符号をもつ弧長としてその幾何学的意味は明らかであった．では双曲線関数の変数 t には，対応する幾何学的意味 — つまり直角双曲線 $\mathscr{H}\colon x^2 - y^2 = 1$ との幾何学的関係 — はないのか?

あるのだ! それも，円関数の場合とほとんど同じものが.

結論から示そう．$\mathscr{H}: x^2 - y^2 = 1$ の正分岐を考える．つまり $\mathscr{H}$ の $x \geq 1$ である．この上の点 $\mathrm{A}(1, 0)$，また $\mathrm{P}(X, Y)$ をとる．この点 P を与える parameter t を $t = T$ としよう．つまり

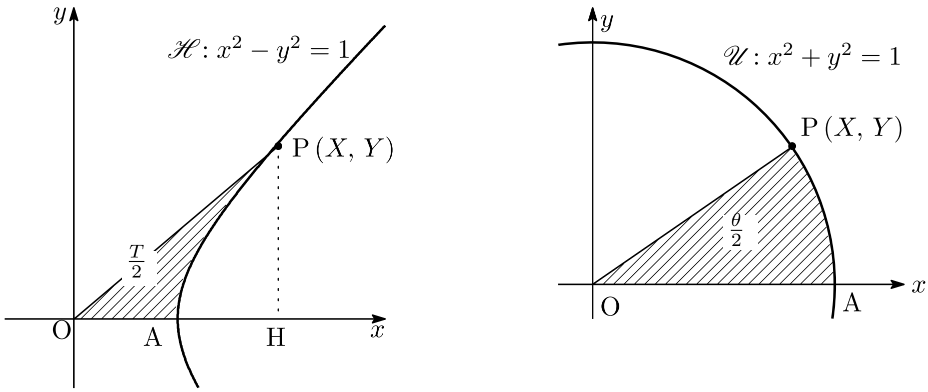
$$X = \cosh T = \frac{\mathbf{e}^T + \mathbf{e}^{-T}}{2}, \quad Y = \sinh T = \frac{\mathbf{e}^T - \mathbf{e}^{-T}}{2}$$

である．線分 OA, OP と双曲線 $\mathscr{H}$ の弧 AP で囲まれた図形を**双曲的扇形** (*hyperbolic sector*) と呼ぶことにしよう．このとき，次が成り立つ；

THEOREM 3.1 (双曲的扇形の面積)

原点 O，点 A (1, 0)，点 P $(\cosh T, \sinh T)$ の 3 点の作る双曲的扇形の有向面積 (符号をもつ面積) は $\dfrac{T}{2}$ に等しい．(Figure 3 (p. 5) を見られたい．)

Figure 3: 双曲的扇形の面積



この定理は，Richard Courant と Fritz John の解析学への有名な入門書 (Courant/John [CJ99], ただし入門書と言っても 3 分冊で合計 1500 pp. になる) の Volume 1, pp. 234ff にもあり，また，E. Hairer と G. Wanner による『歴史に沿った解析学』の考察 (Hairer/Wanner [HW95]) でも取り上げられている (p.55 の Exercise 4.3.)．いずれも `kymst` が非常にお世話になった書物であり，良書であると思う．ところがどちらも双曲線 $\mathscr{H}: x^2 - y^2 = 1$ を $y = \frac{k}{x}$ へと変換して面積を考えるという線で示している．つまり $\mathscr{H}$ に $\dfrac{\pi}{4}$ だけの回転変換を施すわけである．

Hairer/Wanner の方は演習問題であるから，証明が載っている訳ではないが，Hint として描かれている図を見る限りで，この線で考えさせたいのは明らかである．また，この本には蟹江 幸博氏の邦語訳 E. ハイラー/G. ワナー [hai97] があり，訳者による演習問題の解答が巻末に付されているが，そこでも同様である (上巻 p. 244.)．

しかし，せっかくの**本家の円関数 vs. 分家の双曲線関数**という名勝負を観戦しに来た我々としては，反比例のグラフの積分を見たいわけではない．そもそも，x と y の整式 $f(x, y)$ について，方程式 $f(x, y) = 0$ をいつもいつも y について解く，というのは，往々にしてダラダラとした，緊張感のない計算を結果する．はっきり言って，Elegancy に欠ける．要するにヘタクソであり，数学的見識の欠如でしかない．

以下は，最も elegant な (ここは言わせてもらおう— `kymst` による —) 定理 THEOREM 3.1 の証明である．

準備として，双曲線関数の倍「角」公式と次数下げを導いておく．円関数と同様に，加法定理から

の直接の帰結である；

$$\sinh 2\alpha = 2\sinh\alpha\cosh\alpha \quad\Longleftrightarrow\quad \sinh\alpha\cosh\alpha = \frac{1}{2}\sinh 2\alpha,$$

$$\begin{aligned}\cosh 2\alpha &= \cosh^2\alpha + \sinh^2\alpha \\ &= 2\cosh^2\alpha - 1 \quad\Longleftrightarrow\quad \cosh^2\alpha = \frac{1}{2}\left(\cosh 2\alpha + 1\right) \\ &= 2\sinh^2\alpha + 1 \quad\Longleftrightarrow\quad \sinh^2\alpha = \frac{1}{2}\left(\cosh 2\alpha - 1\right).\end{aligned}$$

これを用いて，証明しよう．Figure 3 の左側の図を参照されたい．

双曲的扇形 OAP の面積を S とすると，S は $\triangle$OPH の面積から図形 APH の面積 S_1 を引いて得られる．ここで，$\mathrm{P}\,(X,\,Y)$ として

$$\triangle\mathrm{OPH} = \frac{1}{2}XY, \quad S_1 = \int_{x=1}^{x=X} y\,\mathrm{d}x$$

である．$y = \sinh t$, $x = \cosh t$ であるから $\mathrm{d}x = \sinh t\,\mathrm{d}t$ となり，

$$S_1 = \int_{t=0}^{t=T} \sinh t \cdot \sinh t\,\mathrm{d}t = \int_0^T \sinh^2 t\,\mathrm{d}t.$$

ところが，先ほど導いた sinh についての次数下げによって

$$S_1 = \int_0^T \frac{1}{2}\left(\cosh 2t - 1\right)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sinh 2t - t\right]_0^T = \frac{1}{4}\sinh 2T - \frac{1}{2}T.$$

点 $\mathrm{P}\,(X,\,Y)$ について，これを与える parameter t の値を T としたから，$X = \cosh T$, $Y = \sinh T$ である．従って (再び先に導いた次数下げにより)，

$$\triangle\mathrm{OPH} = \frac{1}{2}XY = \frac{1}{2}\cosh T \cdot \sinh T = \frac{1}{4}\sinh 2T$$

となり，双曲的扇形 OAP の面積 S は，めでたく

$$S = \triangle\mathrm{OPH} - S_1 = \frac{1}{4}\sinh 2T - \left(\frac{1}{4}\sinh 2T - \frac{1}{2}T\right) = \frac{1}{2}T$$

であることが示された． □

さて，もう一度，Figure 3 (p. 5) を見て欲しい．右側に本家の円関数を描いた．円関数の場合にも，扇形 OAP は面積 $\dfrac{\theta}{2}$ をもつ．これが，One More Analogy の意味である．それでも ……

4　だからどうした，と言うのかね，君は ?!

我々は，馴染み深い円関数 (Figure 3 の右側を見られよ) について，単位円 $\mathscr{U} : x^2 + y^2 = 1$ 上の点 $\mathrm{P}\,(X,\,Y)$ が，弧長 AP の向きをもつ長さ (oriented length, directed length) θ によって $X = \cos\theta$, $Y = \sin\theta$ で表されることをスリコマレテ知っている．むしろトラウマというべきか．

従って，円関数とは弧長に，その弧の終点 P の x ないしは y 座標を対応させる関数であり，その逆関数は値域を適当に制限しておいて，点 P の x 座標 X に弧長 $\mathrm{AP} = \theta$ を対応させるのが cos の逆関数，y 座標 Y に弧長 θ を対応させるのが sin の逆関数である．

だからこそ，

$$x = \cos\theta \iff \theta = \arccos x, \qquad y = \sin\theta \iff \theta = \arcsin y$$

として,『弧』“arc” という語が用いられている．$\theta = \arccos x$ を日本語に「訳」せば,「x を余弦にもつ弧の長さは θ である」ということになる．その意味で，関数 arccos, arcsin は**『弧長 arc への関数』**である．

では，その**円関数の宿敵，双曲線関数の逆関数は，何に何を対応させる関数か?!**

我々は Theorem 3.1 (p.5) で，原点 O，直角双曲線の頂点 A (1, 0)，点 P (cosh t, sinh t) の作る双曲的扇形 OPA の面積は $\dfrac{t}{2}$ であることを知った．$x = \cosh t \iff t = \operatorname{arcosh} x$ については，x が定まっても t は符号の両義性をもつが，分岐をいずれかに制限すれば点 P は定まる．$y = \sinh t \iff t = \operatorname{arsinh} y$ については，明らかに実数 $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への全単射である．従って y が定まれば点 P が決定する．

ということは逆双曲線関数は，x や y に，それによって定まる双曲的扇形の面積の 2 倍を対応させる関数である．つまり，$t = \operatorname{arcosh} x$ を日本語に訳せば,

> x を双曲的余弦にもつ点の作る双曲的扇形の面積の 2 倍は t である

ということになる．かくして

> **逆双曲線関数とは，面積 area への関数**

なのである．面積 area，弧 arc ……，従って，

- 円関数の逆関数は「弧長関数」**arc** function だから $\arccos x$, $\arcsin y$,
- 双曲線関数の逆関数は「面積関数」**ar**ea function だから $\operatorname{arcosh} x$, $\operatorname{arsinh} y$

ということらしい．それ故，cosh, sinh の逆関数を “arccosh” や “arcsinh” と表すのは，完全に誤りであることになる．かくして，国際標準化機構 ISO の表記が正しく，学問の殿堂，アカデミズムの千年王国，岩波書店の記法は歴史的にも数学的にも根拠をもたない．

この辺の事情について，`kymst` がこの確信をもてたきっかけは，Roger Godement による解析学の教科書 [God01] に次のような一節があったことによる[3]；

> La notation allemande est Arcosh, de “Areacosinus hyperbolicus”, et la française, Argch. (ドイツでの記法は Arcosh であり，それは「双曲的余弦の面積」に由来する．フランスでは Argch と書かれる．) (Godement [God01] p. 414, Note 28.)

そして高木貞治『解析概論』に次のようにあるのを見つけた (高木貞治 [tak38], p. 195.)；

> cosh, sinh の逆函数を area cos hyp, area sin hyp，または略して ar cosh, ar sinh などで表す.

これが，先ほど述べた「高木貞治は偉かった」というため息の意味であった．あれ，でもこの『解析概論』も岩波…….

[3]また，Web 上の mathe online (`http://www.mathe-online.at/mathint/lexikon/`) の Mathematisches Lexikon は非常に参考になった．残念ながらドイツ語であるが，“Hyperbelfunktionen” を引いて見ると「面積関数」という言葉 “Areafunktionen” がはっきりと出てくる.

5 結論に代えて

arccos と arcosh，arc と area，確かに微妙だといえば微妙かもしれぬ．しかし，我々の数学は，その用いる記号の円滑な運用に多くを追っている．数学全体が記号操作であるとは言わぬ[4]．数学は単なる言語ではないし，単なる記号操作でもない．しかし，事実として，うまくできた記号体系が，広範な数学世界の構造を写し出してくれることを否定する者はいないであろう．概念は，記号を通じて己の構造を実現する．従って記号は，概念間の関係を逆照射しているはずである．

だからこそ，記号のなす体系は，それが逆照射しようとする概念を，その関係を，対比を，対立を，拮抗を，己の内に取り込み，自立的世界を確立しようとする．従ってその記号のおかげを蒙る我々は，記号が構成しようとする自立世界を，数学全体の内に定位し，記号が語らんとすること，その主張，独り言，つぶやき，詠嘆，歓喜に耳を澄ますべきなのだ．

多少，お里の知れる哲学談義が過ぎたかも知れぬ．しかし，なぜこの記号が使われたのか，それは何を意味し，なぜそれを意味しうるのか，— せめてそれを考え，次の世代が学びやすく伝えようとするのが，数学渡世を送る変人・奇人の仁義であり，義理と人情であろう．

この国の数学教育の底の浅さ，軽佻浮薄さを改めて実感するとともに，その末端にいる自分のふがいなさに，忸怩たる思いを深くした．

実は，この Math Jotter by `kymst`, No. C-16 は，実数 $\mathbb{R}$ 上での関数の振る舞いをより大きな数体，つまり複素数体 $\mathbb{C}$ 上で考えると，より一層幸せになれる，という主張を諸君に解ってもらうための準備段階である．

次号 MJK No. C-$n(\in \mathbb{Z}^+)$ では，グーデルマンという偉い先生に登場してもらって,「円関数と双曲線関数は実は同じものである」という話を聞いてみたい．(Not Yet Written. 2011/04/16(Sat))

PS. Maor [Mao94] は，自然対数の底 **e** について，いろいろな話題を扱った読みやすい本である．邦語訳 マオール [mao99] もある．現在の諸君ならば十分に読み進められるはずだが，忙しい身である．来年のその日まで我慢しよう．

この article を作成するに当たって，次の文献を参考にした．もちろんこれ以外にも，`kymst` は先人の多くの業績のおかげで生きている．

References

[CJ99] Richard Courant and Fritz John. *Introduction to Calculus and Analysis. Vol I.* Classics in Mathematics. Springer, 1999. `ISBN: 3-540-65058-X`.

[God01] Roger Godement. *Aanalyse Mathematique I : Convergence, fonctions elementaires. 2eme edition corrigee.* Springer, Berlin, 2001. `ISBN: 3540420576` (1st ed. 1998).

[4]その立場をとる数学もあるし，そう考える数学者もいる．`kymst` の数学研究がその立場をとることから始まったことは事実である.「超数学」metamathematics とか「証明論」proof theory と呼ばれる分野である.「ゲーデルの不完全性定理」(Gödel's Incompleteness theorem) というのを耳にしたことのある諸君もおられるであろう．あれは，まさにこの分野の記念碑的業績である．否，この分野から外の世界に目を凝らすことによって形式と実質との関係を見抜いた，今も生きて活動し続ける知的生命体と言う方が適しているかもしれない．

[hai97] E. ハイラー, G. ワナー. 『解析教程』上下. シュプリンガー・フェアラーク東京, 1997. ISBN: 4431707506.

[HW95] E. Hairer and G. Wanner. *Analysis by Its History.* Undergraduate Texts of Mathematics. Springer, 1995. ISBN: 0-387-94551-2.

[Mao94] Eli Maor. *e. The Story of a Number.* Princeton U. P., 1994. ISBN: 0691058547.

[mao99] マオール, エリ. 『不思議な数 **e** の物語』. 岩波書店, 1999. 伊理 由美 訳 ISBN: 4000059432.

[tak38] 高木貞治. 『解析概論』 改訂第 3 版. 岩波書店, 1976(1938).

Documentation Log
Originally written at 2008/05/29(Thu)
This is version Apr. 2011. (file: mjkNS16CM.tex)
PDF version: Release beta-1 file: mjkC16bt1.pdf

(Sat Apr 16 12:20:12 2011 JST. kymst)