MJK math jotter of kymst

New Series, No.**C-11**. version Apr. 2011.

Taylor's Theorem

Article by YAMASHITA, Koichiro.

我々は，1000 年に一度あるかないか，という危機の真っ只中に，今生きている．危殆に瀕している人々がいる．何も出来ない無力な自分がいる．

我々に出来ることは，これから長きに渡って生きていくことになる諸君に，そしてもうそうは長く生きることはないであろう筆者 **kymst** に，今出来ることは，何か?

買占め**ない**こと，energy を無駄遣いし**ない**こと，...... 否定性を伴なう常識は，人として当たり前のことだと思うが，そうでもないらしい.「節電のため店内を暗くしています」という張り紙をして開いていたゲーセンがあったが，プリクラや UFO catcher と照明，どっちが電気を食うか考えないらしい．パチンコ台が 1 台あれば，その前で本を開くのに十分な明るさなのだが...

「何々すべからず」ではなく「何々すべし」としての，より積極的な格率 (maxim, personal standard) は何か.

> 明らかに，人間は考えるために造られている．それは彼のすべての尊厳であり，彼のすべての価値である．彼のすべての義務は，考えるべきように考えるということである．そして，考える順序としては，自己から始めること，また自己の創造者と自己の目的から始めるべきであろう．...
>
> パスカル『パンセ』第 2 篇 ¶146.

不幸にして亡くなった多くの人々の霊の前で，そしてこの今も苦しんでいる人々のことを胸に，思う：

> **いつの日か，人々の役に立つかもしれない，私の今の責務を，平常心で進める以外に，今の私には何もできない．しかしそれこそが，未来に向けて私に可能な，そして私の義務たる，社会的責任としての自己実現，つまり絶対普遍道徳なのではないか?**

...... だから数学やろう!!

1 Taylor の定理

既に「テイラー展開」であるとか,「マクローリン展開」などというカタカナ定理を耳にしたこともあると思う．例えば

$$\mathbf{e}^x = \frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

を，指数関数 $\mathbf{e}^x$ のマクローリン展開と言う，などとウソブイテいる詐欺本 (受験参考書と呼ばれる) や，流言飛語をバラマク人心を惑わすビラ (プリントと呼ばれる) を眼にした諸君もいるであろう．

しかし，この式で，何を理解するというのか? もう一度考えてみよ．明らかに x は実数 $\mathbb{R}$ に値をとる変数のつもりであろう．ではこの無限和の収束は何によって保証されるのか．x にはある制限が課されるのか，それとも $\mathbb{R}$ 全体でこの式は恒等的に成立するのか.

可能的無限と実無限の根源的隔絶についての無知! 実無限が悪無限に堕する危険性への愚鈍!! ヨーロッパの科学はこの峻別をもってこそ，近代数学を手に出来たのだ．既に古のギリシアにおいて，問題はゼノンの逆理として知の俎上に乗った．哲学者アリストテレスは既に『自然学』*Physica* の第 III 巻で一定の解決を与えた．詐欺本やデマだらけのビラは，2500 年遅れている．

1.1 Taylor's Theorem

まず，いくつかの定義をしておく．関数 $f(x)$ が閉区間 $I = [a, b]$ で連続，かつ開区間 $I^\circ =]a, b[$ で少なくとも n 回微分可能であるとき，

$$f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(b-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(b-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1}$$

を

関数 $f(x)$ の，区間 $I = [a, b]$ における $n-1$ 次 Taylor 和

と呼び，これを

$$T_I^{n-1}(f; a), \quad T_b^{n-1}(f; a)$$

で表す．区間 I の上限 b を固定した上で，a を変数 t に変えて Taylor 和を作れば，それは

$$T_b^{n-1}(f; t) = f(t) + \frac{f^{(1)}(t)}{1!}(b-t) + \frac{f^{(2)}(t)}{2!}(b-t)^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(t)}{(n-1)!}(b-t)^{n-1},$$

つまり

$$T_b^{n-1}(f; t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(b-t)^k$$

となる．これを

関数 $f(x)$ の $n-1$ 次 Taylor 多項式

と呼ぶ.

まずは，次の補題 Lemma 1.1 を用意する；

Lemma 1.1

$f(x)$ は連続性，微分可能性の仮定をみたすとする．このとき，$f(x)$ の Taylor 多項式 $T_b^{n-1}(f; t) = T(t)$ について，

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(b-t)^{n-1}$$

が成り立つ.

Proof.

直接計算である．**タテナラビの勝利である!!**

$$T = f(t) + \frac{f^{(1)}(t)}{1!}(b-t) + \frac{f^{(2)}(t)}{2!}(b-t)^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(t)}{(n-1)!}(b-t)^{n-1}$$

であるから，

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = f'(t) \quad & + \frac{f''(t)}{1!}(b-t) && + \frac{f'(t)}{1!}(-1) \\
& + \frac{f^{(3)}(t)}{2!}(b-t)^2 && + \frac{f''(t)}{2!}(-2)(b-t) \\
& + \frac{f^{(4)}(t)}{3!}(b-t)^3 && + \frac{f^{(3)}(t)}{3!}(-3)(b-t)^2 \\
& \cdots && \cdots \\
& + \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(b-t)^{n-1} && + \frac{f^{(n-1)}(t)}{(n-1)!}(-\overline{n-1})(b-t)^{n-2} \\
& = \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(b-t)^{n-1}.
\end{aligned}
$$

パタパタとかスイスイとかシャッシャッとか，音が聞こえるではないか!! ■

さて，これで Theorem of Taylor の全体を示し，それを証明する準備が整った.『テイラーの定理』Theorem of Taylor とは，次の Theorem 1.2 である；

THEOREM 1.2 (Theorem of Taylor)

関数 $f(x)$ が $I = [a, b]$ で連続，$I^\circ =]a, b[$ で少なくとも n 回微分可能であるとき，関数値 $f(b)$ と a における $n-1$ 次 Taylor 和の間に，次の関係が成り立つ；

$$\exists c \in I^\circ\,;\, f(b) = T_b^{n-1}(f; a) + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n. \tag{1}$$

まず，この形でのテイラーの定理 Theorem 1.2 を証明しておこう.

Proof.

$f(b)$ と Taylor 和 $T_b^{n-1}(f;a)$ の差を $\lambda(b-a)^n$ と置く．以下，$T_b^{n-1}(f;a)$ を単に T と書く.

$$f(b) - T = \lambda(b-a)^n \iff f(b) = T + \lambda(b-a)^n.$$

示すべきことは，$\lambda = \dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}$ をみたす $c \in I^\circ =]a, b[$ が存在することである.

a を変数 t に書き換えて，$T_b^{n-1}(f;t) = T(t)$ とし，関数 $F(t)$ を

$$F(t) = T_b^{n-1}(f;t) + \lambda(b-t)^n = T(t) + \lambda(b-t)^n$$

と定めれば，$F(t)$ は I で連続であり，かつ I° で微分可能である．また，

$$F(a) = T_b^{n-1}(f;a) + \lambda(b-a)^n = f(b), \quad F(b) = T_b^{n-1}(f;b) + \lambda(b-b)^n = f(b)$$

である．従って $F(a) = F(b)$ となり，関数 $F(t)$ は Theorem of Rolle の仮定をすべてみたすから，ある $c \in I^\circ$ が存在して $F'(c) = 0$ が成り立つ.

実際に $F(t)$ を微分すれば，Lemma 1.1 によって $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \dfrac{f^{(n)}(t)}{\overline{n-1}!}(b-t)^{n-1}$ であるから，

$$F'(t) = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\lambda(b-t)^n = \frac{f^{(n)}(t)}{\overline{n-1}!}(b-t)^{n-1} + \lambda(-n)(b-t)^{n-1}.$$

従って

$$0 = F'(c) = \frac{f^{(n)}(c)}{\overline{n-1}!}(b-c)^{n-1} - \lambda n(b-c)^{n-1}$$

より

$$\lambda = \frac{f^{(n)}(c)}{\overline{n-1}!} \cdot \frac{1}{n} = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$$

となり，確かに成立する．つまり

$$\exists c \in I^\circ; f(b) = T_b^{n-1}(f;a) + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n$$

が示された. ■

よく言われる話だが，ここで示した Theorem of Taylor で $n=1$ と置けば，式 (1) は「平均値の定理」Mean Value Theorem となる．何故なら，$n=1$ のときの Taylor 和は $T_b^{n-1}(f;a) = T_b^0(f;a) = f(a)$ であり，それ以外の項，つまり最後の項は $f'(c)(b-a)$ となるから，

$$\exists c \in I^\circ ; f(b) = f(a) + f'(c)(b-a),$$

ナルホド，オナジミの平均値の定理が得られた．その意味で，Taylor の定理は平均値の定理の一般化である．こんなことはどこにでも書いてある...

2 剰余項，剰余関数

Theorem of Taylor の式 (1) (p.3) の右辺の最後の項，つまり Taylor 和以外の項を**剰余項 remainder term** とか**剰余関数 remainder function** と言うが，多くの，特にこの document を眼にする多くの友人たちが読むであろう書籍には，以下の，ある意味で

数学的に最も重要な事実

が書かれていない．それはつまり，

式 (1) だけが Taylor の定理ではない!!

ということである．

なんか別の勉強していて，たまたまテイラー展開が出てきて，一夜漬けでオベンキョして，それ使って答が出たからマァイイカ... という数学への接し方が，すべて悪いとは言わない．アンタのやってた研究では，ただそれでよかっただけである．しかし，その軽佻浮薄なオベンキョの「成果」を，次の世代に，あたかもそれのみが真理であるかの如くに「教えていく」というのは，数学的犯罪である．

`kymst` はその手の犯罪には組みしたくない．

数学は小心であると同時に欲深い (... 逆かな...)，手に入れられる限りの一般性を欲しがると共に，成立しない場合についてクヨクヨ悩み，例外を思い煩う．その結果，

「この場合はダメなのだ!!」

が定理となる．こと数学教育に至っては，この悩みはますます大きくなる．万能ではないことをいかに解ってもらうか? こそが重要なのだ．

良識ある数学人ならば解ってくれるはずで，

- 一般性への渇望として Schlömilch の剰余定理まで，

- 小心さ，ヘタレの証として，Lagrange に対する Cauchy の反例 $f(x) = \mathbf{e}^{-1/x^2}$ まで，

が言及されない Taylor 展開の議論など，まったく無意味であろう．

筆者 `kymst` は以下の document を編むにあたって，これを，最低限の良心であるとともに，Taylor の定理に纏わる数学の *sine qua non*(絶対必要条件) とした．

高校数学も大学数学もあるか ?!

諸君に要求されるのはただ，良質な数学とそれ以外とを峻別する

明晰な，時として冷酷な，価値判断である!!

... と，なんでトッショリがキレカカッテルカ? というと，先ほどの Theorem 1.2 の剰余項を特に

Lagrange 剰余 (Lagrange remainder)

と呼び，他にも重要な剰余があることに言及している書籍が余りに少ないことによる．中でも，次の

Cauchy 剰余 (Cauchy remainder)

は重要であり，我々は対数関数 $f(x) = \ln x$ の考察でそれを用いることになる．

もう一度，Theorem of Taylor を整理することから始めよう．

一般に，ある関数 $f(x)$ か閉区間 I で連続でかつ開区間 I° で n 回微分可能であり (つまり $f^{(n)}(x)$ が存在し)，かつその第 n 階導関数 $f^{(n)}(x)$ が連続であるとき，

関数 $f(x)$ は n 回**連続的可微分 (continuously differentiable)** である

と言い，そのような関数の集合を C^n で表す (定義域 I を明示する場合がある場合には $C^n(I)$ とする)．関数 f が $f \in C^n$ をみたすとき,「f は (区間 I 上で)C^n 級 (class C^n) である」と言う．特に C^0 は連続関数全体の集合である．更に，無限回連続的可微分であるような関数の集合を C^∞ で表す．つまり

$$C^\infty = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C^n$$

である．おなじみの $\mathbf{e}^x$, $\cos x$, $\sin x$ などは $C^\infty(\mathbb{R})$ の顔役であり，$\ln x$ は $C^\infty(\mathbb{R}^+)$ の重要人物である．

これらの概念を用いて Theorem of Taylor を再記する；

THEOREM 2.1 (Taylor Th. Ver. 2)

実数の区間 $I = [a, x]$ の幅を h とする；$h = x - a$．実数値関数 f が I で C^{n-1} 級であり，更に第 n 階導関数 $f^{(n)}$ が存在するとする．Taylor 和を

$$T_I^{n-1}(f;a) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k$$

とするとき，

$$f(x) = T_I^{n-1}(f;a) + R_n$$

をみたす c, $\tilde{c}$ が I° に存在する．ここで，剰余項 R_n は

$$R_n = \begin{cases} R_n^{\mathrm{L}}(c) = \dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}h^n, & \text{(Lagrange Remainder)} \\ R_n^{\mathrm{C}}(\tilde{c}) = \dfrac{f^{(n)}(\tilde{c})}{\overline{n-1}!}(x-\tilde{c})^{n-1}h. & \text{(Cauchy Remainder)} \end{cases}$$

すでに触れたように，剰余項について

- $R_n^{\mathrm{L}}(t) = \dfrac{h^n}{n!} f^{(n)}(t)$ を **Lagrange の剰余関数 (Lagrange Remainder function)** と言い，今後は n 次 L 剰余と呼ぶ.
- $R_n^{\mathrm{C}}(t) = \dfrac{h}{\overline{n-1}!} f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}$ を **Cauchy の剰余関数 (Cauchy Remainder function)** と言い，これも n 次 C 剰余と呼ぼう.

Proof.

Lagrange の剰余に関しては，先ほどの Theorem 1 (p.3) の証明と何も変わらない．ここでは，Cauchy 剰余について示そう．$f(x)$ と Taylor 和との差を $\gamma \cdot h$ と置く；

$$f(x) - T_I^{n-1}(f;a) = \gamma \cdot h \iff f(x) = T_I^{n-1}(f;a) + \gamma \cdot h. \tag{2}$$

このとき，次の (3) が成り立つことを示す；

$$\exists \tilde{c} \in I^\circ; \gamma = \frac{f^{(n)}(\tilde{c})}{\overline{n-1}!}(x-\tilde{c})^{n-1}. \tag{3}$$

(2) の a を t として，関数

$$G(t) = T_I^{n-1}(f;t) + \gamma(x-t)$$

を考えると，

$$G(a) = f(x), \quad G(x) = f(x)$$

となり，また $G(t)$ は微分可能だから，Rolle の定理よりよってある $\tilde{c} \in I^\circ$ が存在して $G'(\tilde{c}) = 0$ が成り立つ.

ここで $G(t)$ について

$$G'(t) = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} - \gamma, \quad \therefore\ G'(\tilde{c}) = \left.\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}\right|_{t=\tilde{c}} - \gamma = 0.$$

よって Lemma 1.1 (p.2) より

$$\gamma = \frac{f^{(n)}(\tilde{c})}{\overline{n-1}!}(x-\tilde{c})^{n-1}$$

となるから，この $\tilde{c} \in I^\circ$ について (3) が成り立つことが言えた. ■

本質的には，以上で示したことと何も変わらないが，定理の使い方として c, $\tilde{c}$ の存在を単位開区間 $U^\circ =]0, 1[$ に閉じ込める次の形がしばしば有効になる.

Corollary 2.2

$\theta, \tilde{\theta} \in U^\circ$ として，関数 $f(x)$ の n 次剰余の Lagrange 型，Cauchy 型は，それぞれ

$$R_n^{\mathrm{L}} = \frac{f^{(n)}(a+\theta h)}{n!}h^n, \qquad R_n^{\mathrm{C}} = \frac{f^{(n)}(a+\tilde{\theta} h)}{\overline{n-1}!}(1-\tilde{\theta})^{n-1}h^n$$

と表される．ここで $h = x - a$ とした.

Proof.

Lagrange 型は $a < c < x$ について $c - a = \theta(x-a) = \theta h$ より，$c = a + \theta h$ を代入しただけである．

Cauchy 型については，$\tilde{c} = a + \tilde{\theta}(x-a) = a + \tilde{\theta}h$ より

$$x - \tilde{c} = x - (a + \tilde{\theta}h) = h - \tilde{\theta}h = (1-\tilde{\theta})h$$

となるから

$$(x-\tilde{c})^{n-1} = (1-\tilde{\theta})^{n-1}h^{n-1}$$

となり，上の R_n^{C} が得られる． ■

特に，関数 $f(x)$ の Taylor 多項式や剰余を，$a = 0$ として考えるとすっきりとした式になる．$h = x - a = x - 0 = x$ であるからである．この形の Theorem of Taylor は「マクローリンの定理」Theorem of Maclaurin と呼ばれるのが常であるが，歴史的にもまた「定理」という呼称にも一切の意味はない．この件については，いつか書かれるであろう Historical Note 1 で詳述する．

Corollary 2.3

関数 $f(x)$ が 0 を含む区間 I で C^{n-1} 級であり，かつ第 n 階導関数 $f^{(n)}$ が存在するならば，この区間に含まれる任意の x について次をみたす $\theta, \tilde{\theta} \in U^{\circ}$ が存在する；

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{\overline{n-1}!}x^{n-1} + R_n,$$
$$R_n^{\mathrm{L}}(\theta) = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n, \qquad R_n^{\mathrm{C}}(\tilde{\theta}) = \frac{f^{(n)}(\tilde{\theta}x)}{\overline{n-1}!}\left(1-\tilde{\theta}\right)^{n-1}x^n.$$

3 Schlömilch の剰余定理

我々は §. 2 で，関数値 $f(b)$ と Taylor 和との差を埋める剰余項について，それが 2 つの表現をもつことを見た．この結果を更に一般化しよう．

そのための準備として，「Cauchy 型平均値の定理」の証明から始めよう．Cauchy 型平均値の定理とは次の定理である；

THEOREM 3.1 (Mean Value Th. Cauchy version.)

関数 f, g が区間 $I = [a, b]$ で連続，開区間 $I^{\circ} =]a, b[$ で微分可能であり，かつ $g(a) \neq g(b)$ であり，更に f' と g' が同時に 0 になることはないとする．このとき，開区間 I° にある c が存在して

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

が成り立つ．つまり

$$\exists c \in I^{\circ};\ \left.\frac{\Delta f}{\Delta g}\right|_I = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Proof.

関数 $\varphi(t)$ を

$$\varphi(t) = (g(b) - g(a)) f(t) - (f(b) - f(a)) g(t)$$

と定義すれば，φ は I で連続であり I° で微分可能である．ここで

$$\begin{aligned}\varphi(a) &= f(a) g(b) - f(a) g(a) - f(b) g(a) + f(a) g(a) \\ &= f(a) g(b) - f(b) g(a), \\ \varphi(b) &= f(b) g(b) - f(b) g(a) - f(b) g(b) + f(a) g(b) \\ &= f(a) g(b) - f(b) g(a)\end{aligned}$$

であるから，$\varphi(a) = \varphi(b)$ である．よって Rolle の定理が成り立ち，ある $c \in I^\circ$ について $\varphi'(c) = 0$ となる．$\varphi(t)$ を微分すれば，それぞれ増分を Δf, Δg として

$$\varphi'(t) = \Delta g \cdot f'(t) - \Delta f \cdot g'(t)$$

であるから，

$$\varphi'(c) = \Delta g \cdot f'(c) - \Delta f \cdot g'(c) = 0, \quad \therefore \left.\frac{\Delta f}{\Delta g}\right|_I = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

となり，確かに成り立つ． ■

この Theorem 3.1 を用いて，Taylor 展開の剰余についての **Schlömilch の剰余公式 (general remainder formula)** を導くことが出来る[1]．

THEOREM 3.2 (Schlömilch の剰余定理)

関数 $f(x)$ が a を含む区間 I で C^{n-1} 級であり，かつ I° で $f^{(n)}$ をもつとし，また $n \in \mathbb{Z}^+$ について，$p \in \mathbb{Z}^+$ を $0 < p \leq n$ とする．このとき，a と異なる任意の x について，ある $c \in]a, x[$ が存在して，関数 f の a における n 次剰余 R_n は

$$R_n = \frac{f^{(n)}(c)}{p \cdot \overline{n-1}!} \left(\frac{x-c}{x-a}\right)^{n-p} (x-a)^n \tag{4}$$

である．

---

n 次剰余を与える式 (4) を **Schlömilch の剰余公式**と言う．

Proof.

$x \in I$ を fix して，区間 J を $J = [a, x]$ とする ($a < x$ としたが，$x < a$ のときも同様である)．J 上で関数 g, h を

$$\begin{aligned}g(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k = T_x^{n-1}(f; t), \\ h(t) &= (x-t)^p\end{aligned}$$

[1] シュレーミルヒ (Oscar Xavier Schlömilch (1823-1901)) はフランスで生まれてドイツで活躍した数学者．Cauchy の解析学の手法は，Schlömilch の書いた解析学の教科書によってドイツに知られるようになった．彼の名が冠された剰余公式は 1847 年の発見である．

と定める．g, h は J 上微分可能であり，

$$g'(t) = \frac{f^{(n)}(t)}{\overline{n-1}!}(x-t)^{n-1}, \qquad h'(t) = -p(x-t)^{p-1}$$

である．よって Theorem 3.1 (p.7) (Cauchy 型平均値の定理) によって

$$g(x) - g(a) = \frac{g'(c)}{h'(c)}\left(h(x) - h(a)\right)$$

をみたす $c \in J^\circ$ が存在する．

ここで $g(a) = T_x^{n-1}(f;a)$，$g(x) = f(x)$ であるから，

$$g(x) - g(a) = f(x) - T_x^{n-1}(f;a) = R_n$$

であり，また $h(a) = (x-a)^p$，$h(x) = 0$ であるから，

$$h(x) - h(a) = -(x-a)^p$$

である．従って

$$\begin{aligned}
R_n &= \left(\frac{f^{(n)}(c)}{\overline{n-1}!}(x-c)^{n-1} \Big/ -p(x-c)^{p-1}\right) \cdot -(x-a)^p \\
&= \frac{f^{(n)}(c)}{\overline{n-1}!} \cdot \frac{(x-c)^{n-1}}{p(x-c)^{p-1}}(x-a)^p \\
&= \frac{f^{(n)}(c)}{p \cdot \overline{n-1}!}(x-c)^{n-p}(x-a)^p \\
&= \frac{f^{(n)}(c)}{p \cdot \overline{n-1}!}\left(\frac{x-c}{x-a}\right)^{n-p}(x-a)^n
\end{aligned}$$

となり，確かに Schlömilch の剰余公式が成り立つ． ■

Theorem 3.2 (p.8) の式 (4) で，$p = 1, 2, \ldots, n$ が任意であることに注意されたい．特に

- $p = n$ とすれば $R_n = \dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n = R_n^{\mathrm{L}}$，
- $p = 1$ とすれば

$$R_n = \frac{f^{(n)}(c)}{\overline{n-1}!}\left(\frac{x-c}{x-a}\right)^{n-1}(x-a)^n = \frac{f^{(n)}(c)}{\overline{n-1}!}(x-c)^{n-1}(x-a) = R_n^{\mathrm{C}}$$

となり，Lagrange 型，Cauchy 型いずれもこの Schlömilch の剰余の特殊な場合であることになる．これは，$\theta \in U^\circ$ として，$c = a + \theta(x-a)$ と定めれば，$x - c = (1-\theta)(x-a)$ となり，剰余を与える式 (4) が

$$R_n = \frac{f^{(n)}(c)}{p \cdot \overline{n-1}!}(1-\theta)^{n-p}(x-a)^n$$

となることから見やすい．

読むな!!
ところで，平均値の定理が出てきたとき，

$c \in]a, b[$ について $c = a + \theta(b-a)$ とすれば，

$$f(b) = f(a) + f'(a + \theta(b-a))(b-a)$$

とも表される

とか言われて,「何でこんなメンドクサイ書き方するんだ?」と思ったでしょ? 正直言って，2 つの代表的な剰余，R_n^{L}, R_n^{C} を考えない段階では，つまり,「チーチーパッパ」微積では，あるいは「流言蜚語テーラー展開」では，$\theta \in U^{\circ}$ は必要ない．あっても無駄で，式がゴタツクだけである．詐欺本やデマチラシでは，何もかもカッコだけ盛り込もうとするから，(おそらく書いてる本人も) 使い道の解らない θ が出て来て，何の効用もないままほって置かれる．書いてる人，Schlömilch の剰余のこと，知ってましたか? 数学，ナメナイ方がいいですよ．

読むなって言ったのに...

4 n，無限大への旅立ち

いよいよ，Taylor 和 T_I^n をどこまでも長くして,「無限に長い多項式」を考える段階に入った．ある意味で，解析学を代数化することになる．詳しくは Historical Note 2 「Lagrange と Cauchy」(Not Yet Written) で論じるつもりであるが,『形式的べき級数環』という概念に出くわすことになる．今しばらく，詳細は待たれたい．

といっても話は簡単で，関数 $f(x)$ が区間 I で任意回微分可能であって (つまり $f \in C^{\infty}(I)$ で)，更に $x \in I^{\circ}$ なる任意の x について剰余項 R_n が

$$R_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

であるならば，$x - a = h$ として

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} h + \frac{f''(a)}{2!} h^2 + \dots$$

と書けることになる．これが，$f(x)$ の $x = a$ を中心とした Taylor 展開である．

特に $a = 0$ ならば $h = x$ となるから，次の $f(x)$ の Maclaurin 展開を得る；

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

しかし，剰余項 R_n は複雑である. 一般の場合には，そもそも構成的でない．つまり $c \in I^{\circ}$ は存在することは示されても，それを確定する algorithm は存在しない．非構成的存在定理なのである．従って，関数の Taylor 展開の可能性こそが重要問題となる．話が簡単な分，有意でかつ確定的な主張をするためには，キチッとした準備が必要だ，という，数学によく見られる困難である．

級数の収束について論じるために，数列の極限についての次の補題を挙げておこう．

Lemma 4.1

$\mathbb{R}^{\times} = \mathbb{R} \backslash \{0\}$ 上の数列 (a_n) について，次が成り立つ；

(i) 正整数 N と，1 より小さい正の数 r が存在して，N 以上の任意の正整数 n について不等式

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < r$$

が成り立つならば，$a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ である;

$$\exists N \in \mathbb{Z}^+,\ \exists r < 1,\ \forall n \geq N;\ \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < r \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

(ii) 隣接する 2 項の絶対比 $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ の極限が 1 より小さいならば，$a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ である；

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

(iii) $c \in \mathbb{R}^\times$ について $\dfrac{c^n}{n!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$

Proof.

(i) 仮定より

$$\left|a_{N+1}\right| < r\left|a_N\right|, \quad \left|a_{N+2}\right| < r\left|a_{N+1}\right|, \quad \ldots, \quad \left|a_{N+k}\right| < r\left|a_{N+k-1}\right|$$

が成り立つから，辺々かけて

$$\left|a_{N+k}\right| < r^k\left|a_N\right|$$

を得る．$0 < r < 1$ だから，この左辺は 0 を極限とし

$$\left|a_{N+k}\right| \xrightarrow[n=N+k\to\infty]{k\to\infty} 0, \quad \therefore \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

(ii) 絶対比 $\left|a_{n+1}/a_n\right|$ の極限を λ とすれば，仮定より $\lambda < 1$ である．ε を，$\lambda + \varepsilon < 1$ である正数とし，$r = \lambda + \varepsilon$ とすれば $\lambda < r < 1$ となる．$\lim_{n\to\infty} a_n = \lambda$ より，ある $N \in \mathbb{Z}^+$ が存在して，$n \geq N$ なる任意の $n \in \mathbb{Z}^+$ について $\left|a_{n+1}/a_n\right| < r(< 1)$ が成り立つ．よって上記 (i) により $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ が成り立つ．

(iii) $a_n = \dfrac{c^n}{n!}$ とすれば，絶対比は

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\left|c\right|^{n+1}}{n+1!}\Big/\frac{\left|c\right|^n}{n!} = \frac{\left|c\right|}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

となるから，上記 (ii) より成立．

■

この Lemma 4.1 により，関数 $f(x)$ が Taylor 展開可能か否かについて，次の強力な判定条件を得る；

THEOREM 4.2 (Taylor 展開可能性)

関数 $f(x)$ が a を含む開区間 $I^\circ =]p,\, q[$ で任意回微分可能であるとする．任意の $x \in I^\circ$ について

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \leq M \quad (n = 1,\, 2,\, \ldots)$$

をみたす $M \in \mathbb{R}$ が存在するならば，$f(x)$ はこの区間の任意の x について Taylor 展開可能である．

一般に，数列 (a_n) のとる値や，関数 $f(x)$ の値域，更にはある集合 $S \subset \mathbb{R}$ などについて，それがある実数 M によって上から押さえられているとき，その数列や関数，集合を

上に有界である (upper bounded，bounded to the above)

と言う．集合 S で表せば，S が上に有界とは次が成り立つことである；

$$\exists M \in \mathbb{R};\, \forall x \in S\,;\, x \leq M.$$

これをみたすような $M \in \mathbb{R}$ を

集合 S の (1 つの) 上界 (an upper bound)

と言い，S の上界の中で最小のものを

最小上界，上限 (the least upper bound， supremum)

と言う．**下に有界 (lower bounded, bounded to the below)**，**下界 (a lower bound)**，**最大下界，下限 (the greatest lower bound， infimum)** も，双対的に定義される．集合 S が上下に有界のとき，単に

S は有界である (bounded)，有界性 (boundedness) をもつ

と言われる．

更に，数列 (a_n) の上界が n に依存せずに定まったり，あるいは関数 $f(x)$ の上界が定義域内の x に依存せずに定まるとき，その数列や関数は

一様に有界である (uniformly bounded)

であると言われる．

この用語を用いれば，この Theorem 4.2 (p.11) は，次のように言いかえることができる；

Theorem 4.2′

関数 $f(x)$ が区間 I° で任意回微分可能であり，その導関数 $f^{(n)}(x)$(ただし $n \in \mathbb{Z}^+$) が I° 上で一様に有界ならば，$f(x)$ は I° 上で Taylor 展開可能である．

Proof.

関数 $f(x)$ について，$n-1$ 次 Taylor 和と n 次剰余について

$$f(x) = T_I^{n-1}(f, x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k,$$

$$R_n = R_n^{\mathrm{L}} = \frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n, \quad \theta \in U^\circ$$

について，剰余の絶対値を作ると

$$\left|R_n\right| = \frac{\left|f^{(n)}(a+\theta(x-a))\right|}{n!}\left|x-a\right|^n \leq M\frac{\left|x-a\right|^n}{n!}$$

が成り立つ．Lemma 4.1 (p.10) の (iii) によって

$$\frac{\left|x-a\right|^n}{n!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

が成り立つから，$\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ となり，$f(x)$ は Taylor 展開可能である． ■

…… というところで，Math Jotter of `kymst` の No. C-11 は終わることにしよう．以下，MJK No. C-12 では，具体的な関数 $\mathbf{e}^x$, $\cos x$, $\sin x$ などを題材にとり，考察を深める (つもりであるが，予定は未定とも言う)．そう言えば，ヒトの悪口言ってるとき以外は具体的な関数がマッタク出てきませんでしたね... 昔,「`kymst` の解析には f と g しか出てこない」という誉め言葉を，ある研究室で後ろ指を指されつつ耳にしたことがある．こういうのを，人間の identity と言うのだろうか.

では，Brook Taylor と Colin Maclaurin の尊顔を拝しつつ，Key Board を離れる．

画像は University of St. Andrews の The MacTutor History of Mathematics archive `http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/index.html` より拝借した.

Figure 1: 左が Brook Taylor (1685-1731)，右が Colin Maclaurin (1698-1746)

Documentation Log
Originally written at `2009/06/18(Thu)`
This is version Apr. 2011. (file: `mjkNS11CM.tex`)
PDF version: Release beta-1 file: `mjkC11bt1.pdf`
Downloadable from `http://kymst.net/mjk`.

(Sat Apr 16 11:03:32 2011 JST. `kymst`)