math jotter of kymst

New Series, No.**A-6**. version Mar. 2011.

数学はiにあふれて

Article by YAMASHITA, Koichiro.

やった様で何もやってない分野に，複素数というのがある．アンマリ出ナイ，とか言われていい加減にしていると，数学自体がイイカゲンになる．数学の表層に現れる実数体 $\mathbb{R}$ の真理は，深層に隠れた複素数の真理によって結ばれている．喩えて言えば，実数が大洋に浮かぶ散在する孤島であるとすれば，複素数は海底の，否，地殻の全体である．その海底探査に乗り出そう．

1 複素数体 $\mathbb{C}$ の導入

一般に，数からなる集合で，その中で加減乗除が自由にできるようなもの (もちろん 0 での除法を除く) を**数体** (Eng. *Number Field*, Deu. *Zahlenkörper*) と言う．有理数体 $\mathbb{Q}$ は最も小さい数体である．実数体 $\mathbb{R}$ は $\mathbb{Q}$ を含むから，$\mathbb{Q}$ の拡大体 (*extension field*) であり，逆に $\mathbb{Q}$ は $\mathbb{R}$ の部分体 (*subfield*) である．

$\mathbb{Q}$ と $\mathbb{R}$ の間には，$\mathbb{Q} \subset \mathbb{K} \subset \mathbb{R}$ であるような体がクサルほどある．例えば，集合 $\mathbb{K}$ として

$$\mathbb{K} \overset{\text{def}}{=} \left\{ x + y\sqrt{2} \,\middle|\, x,\, y \in \mathbb{Q} \right\}$$

とすれば，$\mathbb{K}$ は数体となる (**確かめよ!**)．

実際には，この $\mathbb{Q}$ の代りに実数 $\mathbb{R}$ を，そして $\sqrt{2}$ の代りに**虚数単位** (*imaginary unit*)，$\mathbf{i}$，を使って同じ作り方をしたものが**複素数体** (*complex number field*) である．それは $\mathbb{C}$ と表される：

$$\mathbb{C} \overset{\text{def}}{=} \left\{ x + y\mathbf{i} \,\middle|\, x,\, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Nota Bene. 嫌諦凶禍書などでは，虚数単位は ‘i’ で表されるが，虚数単位はバリバリの定数である．‘i’ は和の記号 $\sum$ などで index 変数として使われることが多い．この document では，虚数単位を bold-roman の ‘$\mathbf{i}$’ で表す．少しは，学ぶ立場に立って考えろよな，悶侮禍愣省の ×× 役人! (タコさん，ゴメンなさい... **どうも日本語入力の調子がヘンです...**)

キチッと定義していこう．

$\mathbb{R}$ を実数全体とする．$a,\, b \in \mathbb{R}$ について，a と b とからなる順序対 $(a,\, b)$ の全体を $\mathbb{R}^2$ で表す．これを $\mathbb{R}$ のそれ自身との**直積** (*direct product*) と言う：

$$\mathbb{R}^2 = \left\{ (a,\, b) \,\middle|\, a,\, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

これが，オナジミ xy 座標平面そのものであることはお解りであろう．この $\mathbb{R}^2$ に，ある構造 ——**複素構造**——を持ち込んでいく．

Definition 1.1 (順序対としての複素数)

複素数 (*complex number*) とは実数の順序対 $(a,\,b)$ であり，次の条件をみたす：
$z=(a,\,b),\ w=(c,\,d)\in\mathbb{R}^2$ について，

$\sharp.1$ 相等：$z=w \iff a=c\wedge b=d.$

$\sharp.2$ 加法：$z+w \overset{\text{def}}{=} (a+c,\,b+d),\quad$ (sign resp.).

$\sharp.3$ 乗法：$zw \overset{\text{def}}{=} (ac-bd,\,ad+bc).$

相等性の定義から，複素数は次の**同値関係** (*equivalence relation*) をみたすことは直ちに解る：

(a) 反射律 (reflexive): $\forall z\in\mathbb{R}^2;\ z=z.$

(b) 対称律 (symmetric): $\forall z,\,w\in\mathbb{R}^2;\ z=w\ \Rightarrow\ w=z.$

(c) 推移律 (transitive): $\forall z_1,z_2,z_3\in\mathbb{R}^2;\ z_1=z_2\wedge z_2=z_3\ \Rightarrow\ z_1=z_3.$

加法については，z と w を実平面 $\mathbb{R}^2$ における vector と考えれば，横に書いてあるだけで何の問題もない．問題は乗法である．もちろん `kymst` のシタゴコロはミエミエだと思うが...

また，減法は加法の単位元があるからいいとしても，除法がないことに**首をかしげたカレ，カノジョ，スルドイ!** と言うのは，複素数の除法について，堂々と

$$\frac{a+b\mathbf{i}}{c+d\mathbf{i}}=\frac{(ac+bd)+\mathbf{i}(bc-ad)}{c^2+d^2}\tag{1}$$

で定義したつもりになっているサギ本[1] やガセビラ[2]を目にする．

ちょっと待って．この「定義」は，何を何で定義しているの? 左辺は除法じゃないの!? 右辺に変形することが除法なの!?

何を認めれば何が示せるのか，何と何は絶対不可欠であり，何が余剰なのか，それを考えることが数学をやるということだ．

次の一連の命題を示すことは，困難ではない：

I. 加法について．上で定義された $\mathbb{R}^2$ における加法は

- 交換法則が成り立つ (**可換である** *commutative*): $\quad z+w=w+z.$
- 結合法則が成り立つ (**結合的である** *associative*): $\quad \bigl(z_1+z_2\bigr)+z_3=z_1+\bigl(z_2+z_3\bigr).$
- **加法単位元** (*additive identity*) が存在する．それは $(0,\,0)$ である．
- **加法逆元** (*additive inverse*) が存在する．$z=(a,\,b)$ について $(-a,\,-b)$ がそれである．これを $-z$ と書くことにしよう．

II. 乗法について，

- 交換法則が成り立つ (**可換である** *commutative*): $\quad z\cdot w=w\cdot z.$

---

[1] 本屋さんに並ぶ愕醜惨慌書 (**... アレ，マタ...**).
[2] コピー機がなければ存在できない，はさみとのりで作られた紙くずのこと．プリントとも呼ばれる．

- 結合法則が成り立つ (**結合的である** *associative*): $\bigl(z_1 \cdot z_2\bigr) \cdot z_3 = z_1 \cdot \bigl(z_2 \cdot z_3\bigr)$.
- **乗法単位元** (*multiplicative identity*) が存在する．それは $(1, 0)$ である．
- **乗法逆元** (*multiplicative inverse*) が存在する ... (ホントか?)

III. 乗法の加法に対する**分配性** (*distributive*)．次の分配法則が成り立つ：

$$z \cdot \bigl(w_1 + w_2\bigr) = zw_1 + zw_2.$$

乗法逆元の存在以外は明らかであろう．この乗法逆元こそ，複素数の命である．示すべきことは，任意の $z = (a, b)\,(\neq (0, 0))$ について，ある $w = (x, y)$ が存在して

$$zw = (a, b) \cdot (x, y) = (1, 0)$$

が成り立つことである．乗法の定義によって

$$zw = (ax - by,\ ay + bx) = (1, 0) \iff \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

であり，$\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2 \neq 0$ であるからこの行列は正則である．そこで，左から逆行列をかけて

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}$$

を得る．従って，$z = (a, b)$ の乗法逆元は $\bigl(\frac{a}{a^2+b^2},\ \frac{-b}{a^2+b^2}\bigr)$ である．ナルホド，$z = (a, b) \neq (0, 0)$ である限りで，z の乗法逆元が $\mathbb{R}^2$ に存在する．そこでこれを z^{-1} と書くことにしよう．

この，I, II, III をみたすような集合 $\mathbb{K}$ と 2 つの演算 $+, \cdot$ の組 $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ を**体** (Eng. *field*, Deu. *Körper*) と言う.「タイ」と読む (詳しくは，乗法が可換であるので可換体と言う)．従って我々は，上記の考察により次の定理を得たことになる (**ナンテ身モ蓋モナイ...**)：

THEOREM 1.2 (可換体としての $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$)

$\mathbb{R}^2$ に Definition 1.1 の演算 $+$ と $\cdot$ を定義するとき，$\bigl(\mathbb{R}^2, +, \cdot\bigr)$ は可換体となる．今後，この体を**複素数体** (*complex number field*) と呼び，$\mathbb{C}$ で表す.

また，特に $\mathbb{C}$ から $(0, 0)$ を除いた集合を $\mathbb{C}^\times$ と表す.

特に $(a, 0)$ という形の複素数を考えよう．定義から

$$(a, 0) \pm (b, 0) = (a \pm b, 0)\,,\ (a, 0) \cdot (b, 0) = (ab, 0)\,,\ (a, 0)^{-1} = \frac{1}{a^2 + 0}\,(a, 0) = \left(\frac{1}{a}, 0\right)$$

であるから，順序対の最初の成分だけに着目すれば十分であることが解る (最後の式では $a \neq 0$ とした)．つまり，この形の複素数は実数と同じである．そこで，複素数 $(a, 0)$ を実数 a と同一視する．$(0, 0)$ も実数の 0 である．逆に実数とは第 2 成分が 0 であるような複素数である，とも言える．これによって，複素数体 $\mathbb{C}$ は実数体 $\mathbb{R}$ を部分集合として含むことになる

次に，特別な要素 (0, 1) を採り上げよう．この，自分自身との積は，やはり乗法の定義 Definition 1.1 **だけから**

$$(0,\,1)^2 = (0,\,1)\cdot(0,\,1) = (0-1,\,0+0) = (-1,\,0) = -1$$

となる．これは何を意味するか (**ミエミエ!**)．平方して -1 となる複素数が存在し，それは (0, 1) である，ということに他ならない．

多くの入門教程で，虚数単位 $\mathbf{i}$ が導入される際,「2 乗して -1 になるものを $\mathbf{i}$ と表す．もう 1 つ，$-\mathbf{i}$ も 2 乗すれば -1 となる.」と言って済まされるのが実情である．しかし,「もともと $\mathbf{i}$ は正でもなければ負でもない，この $\mathbf{i}$ についてる符号，“+” や “−”って，何だ?」とか悩んでいると「**イーカラ問題解ケ!**」と怒られる... そりゃナイヨネ．ここは，諸君に同情の余地があると思う．

我々の定義は「**イーカラ**」を許さない．次が虚数単位 $\mathbf{i}$ の定義である：

Definition 1.3 (虚数単位 i)

(0, 1) $\in \mathbb{C}$ を**虚数単位** (*Imaginary Unit*) と呼び，$\mathbf{i}$ で表す.

この $\mathbf{i}$ によって，$\mathbb{C}$ のすべての要素 $z = (a,\,b)$ は

$$(a,\,b) = (a,\,0) + (0,\,b) = (a,\,0) + (b,\,0)\cdot(0,\,1)$$

と表される．これが，複素数 z が $a,\,b \in \mathbb{R}$ として $z = a + b\mathbf{i}$ と表されてよいことの根拠になっている．$-\mathbf{i}$ とは $(-1,\,0)\cdot(0,\,1)$ であった訳である．それは定義どおりの計算によって $(0,\,-1)$ でもある.

2 いくつかの定義

どこかの国の高校数学と違って，我々はあいまいさなく複素数体 $\mathbb{C}$ を構成することができた．$\mathbb{C}$ に導入された構造,『複素構造』を以下で解析していこう．いくつかに分割して列挙する.

A. 実部と虚部 $z = (a,\,b) = a + b\mathbf{i} \in \mathbb{C}$ について，a を z の**実部** (*real part*) と呼び，$\Re z$ あるいは $\mathrm{Re}\,z$ と，また，b を z の**虚部** (*imaginary part*) と呼び，$\Im z$ あるいは $\mathrm{Im}\,z$ と表す．**虚部は虚数ではない! 実数である!! 混乱しやすいので注意せよ**．$\Re$, $\Im$ はドイツで使われていた「フラクトゥール体」Fraktur Schrift と言う由緒正しい字体で，それぞれ R, I に当たる．学生用語で「花文字」,「亀の子文字」とも言われる.

実数とは虚部が 0 であるような複素数であり，また，実部が 0 であるような，0 でない複素数，つまり実部は 0 で虚部が 0 でない複素数を**純虚数** (*pure imaginary*) と言う：まとめると，$z \in \mathbb{C}$ について

$$z \in \mathbb{R} \iff \Im z = 0, \qquad z : \text{pure imaginary} \iff z \neq 0 \land \Re z = 0.$$

B. 複素共役 $z = (a,\,b) = a + b\mathbf{i} \in \mathbb{C}$ について，虚部の符号を変えた複素数 $(a,\,-b) = a - b\mathbf{i}$ を z の**複素共役**，**共役複素数** (*complex conjugate, conjugate complex number*) と言い，$\overline{z}$ で表す.

次の関係式は極めて重要であるが，確かめるのは容易である：

THEOREM 2.1 (複素共役)

$z, w \in \mathbb{C}$ について次が成り立つ：

$$\overline{z \pm w} = \overline{z} \pm \overline{w} \text{ (sign resp.)}, \quad \overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}, \quad \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}} \ (w \neq 0),$$
$$\Re z = \frac{z + \overline{z}}{2}, \quad \Im z = \frac{z - \overline{z}}{2\mathbf{i}}, \quad \overline{\overline{z}} = z.$$

C. 絶対値　任意の $z = a + b\mathbf{i} \in \mathbb{C}$ について，それとその複素共役との積，つまり

$$z\overline{z} = (a + b\mathbf{i})(a - b\mathbf{i}) = a^2 + b^2$$

は常に実数であり，しかも非負である．$a, b \in \mathbb{R}$ であるから，これが 0 になるのは特に $z = 0$ のときに限る．従って，この値の非負の平方根を考えることができる．これを $|z|$ と表し，複素数 z の**絶対値** (*absolute value*)，または *modulus* と言う：

$$z\overline{z} = |z|^2, \quad \therefore \ |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \left(z\overline{z}\right)^{1/2}.$$

絶対値が 0 である複素数は 0 に限ることに注意せよ．

これらをまとめて次が成り立つ．確かめるのは容易である：

Corollary 2.2

任意の $z, w \in \mathbb{C}$ について

$$|\Re z| \leq |z|, \quad |\Im z| \leq |z|, \quad |\overline{z}| = |z|;$$
$$|zw| = |z| \cdot |w|, \quad \text{in particular,} \quad |-z| = |z|; \quad \left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|} \ (w \neq 0).$$

3　複素数平面

さて，我々は複素数体 $\mathbb{C}$ を 2 つの実数からなる順序対の集合として導入した．実数 a, b からなる順序対 (a, b) は直交座標平面 (Cartesian Plane) 上の点に対応するから，複素数の全体 $\mathbb{C}$, つまり

$$\mathbb{C} = \left\{ a + b\mathbf{i} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

と，実数体 $\mathbb{R}$ のそれ自身との直積

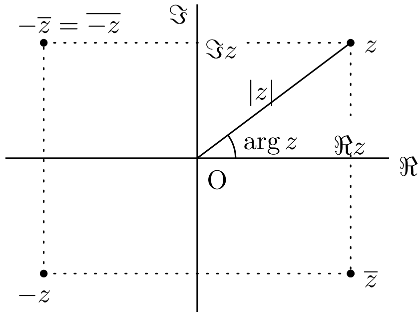
$$\mathbb{R}^2 = \left\{ (a, b) \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

の間には全単射，つまり上への 1 : 1 の対応が存在する．

このように考えられた平面を**複素数平面** (*complex number plane*) [3]と言い，横軸を**実軸** (*real axis*), 縦軸を**虚軸** (*imaginary axis*) と呼ぶ．今後，この複素数平面を $\pi_{\mathbb{C}}$ または単に $\mathbb{C}$ で表す．

[3]創案したと伝えられている数学者の名を冠して「アルガン平面」，あるいは「ガウス平面」と呼ばれることもある．Jean Robert Argand(1768-1822) はスイスに生まれパリに没した数学者である．複素数の絶対値 (modulus) も彼の考案らしい．ガウスの方はあの，言わずと知れた「数学の帝王」Carl Friedlich Gauss (1777-1855) である．ガウスはその学位論文で,「n 次の代数方程式は重複を許してちょうど n 個の解を複素数にもつ」という『代数学の基本定理』(Fundamental Theorem of Algebra) を証明したが，その証明はまさにこの複素数平面を舞台とする．

Figure 1: 複素数平面 $\pi_{\mathbb{C}}$



この document でこれまでに定義された様々な概念は，この複素数平面上で完全に視覚化される．$z = a + b\mathbf{i} \in \mathbb{C}$ の絶対値 $|z| = \left(a^2 + b^2\right)^{1/2}$ は，原点 O と点 P(z) とを結ぶ線分 OP の長さであり，z の複素共役 $\overline{z} = a - b\mathbf{i}$ に対応する点 Q$(\overline{z})$ は，実軸に関して P(z) と対称な点である．また，$z = a + b\mathbf{i}$, $w = c + d\mathbf{i} \in \mathbb{C}$ について，P(z)，Q(w) としてそれぞれ vector $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を対応させれば，複素数同士の和 $z + w$ は当然

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + c \\ b + d \end{pmatrix} = \overrightarrow{\mathrm{OR}}$$

となり，vector の和に対応する．

従って，複素数平面 $\pi_{\mathbb{C}}$ 上でも分点公式や直線の paramter 表示が考えられる．もし話がここで終わるなら，何も複素数平面 $\pi_{\mathbb{C}}$ などというイカメシイものをもち出さなくても，2 次元の vector 平面で考えることと変わらない.「複素数は vector だ」ですむはずである．つまりこういうことだ．2 次元の vector 平面 $\mathbb{R}^2$ の 2 つの基本 vector $\boldsymbol{u}_x = \binom{1}{0}$, $\boldsymbol{u}_y = \binom{0}{1}$ に，それぞれ「実数単位」1，虚数単位 $\mathbf{i}$ を対応させれば，加法と減法，絶対値，軸についての対称移動などは，$\mathbb{R}^2$ と $\pi_{\mathbb{C}}$ とでまったく同じ構造をもつ．このようなとき，2 つの構造は**同型である** (*isomorphic*) と言う．数学では，同型であるものは区別しない．それらを同一視して余計な住人を増やさない．**プラトンの顎鬚とオッカムの剃刀!** [4]

違うのだ! 上で触れた，いくつかの概念の視覚化には，複素数の乗法に関する結果がまったく含まれていなかったことに気がついているであろうか．Vector には，通常の意味での乗法は定義されていない．Vector の内積は vector ではなく scalar である．従ってそれは scalar 積とも呼ばれる．また，2 つの 2 次元 vector の外積は，その 2 次元平面には含まれず，その平面に垂直な第 3 の次元の vector になる．つまり，vector 平面，2 次元 vector 空間 $\mathscr{V}_2$ は乗法について閉じていない．それに対して，複素数全体 $\mathbb{C}$ は乗法について閉じている．それが，$\mathbb{C}$ が体であることの意味でもある (*cf.* Section 1).

では，vector 空間 $\mathscr{V}_2 = \mathbb{R}^2$ には存在せず，複素数体 $\mathbb{C}$ においてこそ顕現する，乗法についての代数構造は，複素数平面 $\pi_{\mathbb{C}}$ では何を意味するのか? これが問題なのだ!

[4] 詳しい話はここでは出来ない．哲学上の観念論と唯名論の対立．それが普遍論争に繋がり，今日的にも解決されたとは言えない問題である，とだけ言っておく．

3.1 複素数の極表示

$z = a + b\mathbf{i} \in \mathbb{C}^\times$ $(a,\ b \in \mathbb{R})$ が与えられたとしよう．$\pi_{\mathbb{C}}$ 上で原点 O から P (z) に至る vector $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ が定まる．この $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の大きさ $\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|$ が $|z|$ になることは既に述べた．Vector である以上，$z = 0 \iff \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \boldsymbol{o}$ でない限り，方向が定まる．この方向を概念化しよう．$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ が実軸正方向となす，**向き付けられた角** (*sensed-, oriented- angle*) を z の，あるいは $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の，**偏角** (*argument*) と言い．$\arg z$ で表す．角の向きは正の回転，つまり反時計方向の回転を正とする．上の Figure 1 で，P (z) とし，また $\Re$ 上の点 A (1) をとれば $\arg z = \measuredangle\mathrm{AOP}$ である (記号 $\measuredangle$ は，向き付けられた角，つまり正負をもつ角を表す)．

$z \neq 0$ について $|z| = r$, $\arg z = \theta$ としよう．このとき明らかに

$$z = r(\cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta), \quad \Re z = r\cos\theta, \quad \Im z = r\sin\theta$$

である．このように，$z \in \mathbb{C}^\times$ を，その絶対値 $|z| = r$ と偏角 $\arg z = \theta$ によって表したとき，それを複素数 z の**極表示** (*polar expressin*) または**極形式** (*polar form*) と言う．要は,「近くにコンビニある?」と聞かれて「北緯 y，東経 x」と答えるヤツは，社会生活送りにくいよね．普通,「この道まっすぐ 100m 位行ったとこ」って言うよね，という話．

さて，この極形式によって決定的に重要な，次の定理が証明される．

THEOREM 3.1 (乗法と偏角)

$z,\ w \in \mathbb{C}^\times$ について，次が成り立つ：

$$|zw| = |z| \cdot |w|, \qquad \arg zw = \arg z + \arg w.$$

Proof.

$|z| = r_1$, $|w| = r_2$; $\arg z = \theta_1$, $\arg w = \theta_2$ とすると，$z = r_1(\cos\theta_1 + \mathbf{i}\sin\theta_1)$, $w = r_2(\cos\theta_2 + \mathbf{i}\cos\theta_2)$ である．この積について次が成り立つ：

$$\begin{aligned} zw &= r_1(\cos\theta_1 + \mathbf{i}\sin\theta_1) \cdot r_2(\cos\theta_2 + \mathbf{i}\sin\theta_2) \\ &= r_1 r_2\bigl(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + \mathbf{i}(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)\bigr) \\ &= r_1 r_2\bigl(\cos(\theta_1 + \theta_2) + \mathbf{i}\sin(\theta_1 + \theta_2)\bigr). \end{aligned}$$

円関数の加法定理を用いた．従って，確かに

$$|zw| = r_1 r_2 = |z| \cdot |w|, \quad \arg zw = \theta_1 + \theta_2 = \arg z + \arg w$$

となり，示された． ■

尚，0 には偏角を定義しない．この辺は vector の内積と同じである．

3.2 De Moivre の定理

$1 \in \mathbb{C}$ について，$|1| = 1$, $\arg 1 = 0$ であることから，Theorem 3.1 の系として次が得られる．$z \cdot \frac{1}{z} = 1$ に注意すれば証明は易しい．

Corollary 3.2

$z \in \mathbb{C}^\times$, $w \in \mathbb{C}$ について

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|},\ \arg\frac{1}{z} = -\arg z; \qquad \left|\frac{w}{z}\right| = \frac{|w|}{|z|},\ \arg\frac{w}{z} = \arg w - \arg z.$$

この Corillary によって，$z = r(\cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta)$ について

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}\cdot\frac{1}{\cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta} = \frac{1}{r}\cdot\bigl(\cos(-\theta) + \mathbf{i}\sin(-\theta)\bigr) = \frac{1}{r}\cdot\bigl(\cos\theta - \mathbf{i}\sin\theta\bigr)$$

が成り立つ．

Nota Bene. 実際には，この極形式 $r(\sin\theta + \mathbf{i}\sin\theta)$ には，偏角 θ についての情報が重複して登場する．これは無駄なことで，極座標 $[r,\,\theta]_{\mathrm{P}}$ で済むことである．しかしそれでは「現場は $\pi_{\mathbb{C}}$ だ!」感が薄れる．

ごく少数であるが，最近，特にアメリカの文献に，$\cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta$ を $\mathbf{cis}\theta$ と書いてあるものが散見されるようになった．まだ多数派ではないが，確かに同値な情報を与えることには成功している．Native の友人に何と読むのか尋ねたところ，“San Fran-*cis*-co” の *cis* の読み方で良いそうである．

そして極めつきの表記! というか **Euler’s Magic!!** 次が成り立つ：

$$\cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta = \mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}.$$

$\mathbf{e}$ は言わずと知れた自然対数の底である．Euler はもちろん「我々すべての師」，あの Leonhard Euler (1707-1783) である．彼は，この式に何一つ証明を与えることなく，この式を使って膨大な真理を見出した．今ではどうなのか，って? ... 流儀にもよるが，むしろこの式を円関数の定義にしてしまう，というのが大方のやり方である．

帰納的に，次が成り立つことも明らかであろう．$\prod_{k=1}^{n}$ は $k=1$ から n に渡る積を表す．

Corollary 3.3

$z_k \in \mathbb{C}^\times$ $(k = 1,\,2,\,\ldots,\,n)$ について

$$\left|\prod_{k=1}^{n} z_k\right| = \prod_{k=1}^{n}|z_k|, \qquad \arg\prod_{k=1}^{n} z_k = \sum_{k=1}^{n}\arg z_k.$$

この Corollary で，$z_1,\,z_2,\,\ldots,\,z_n$ をすべて z とすれば，次の Theorem of de Moivre [5]が得られる：

THEOREM 3.4 (De Moivre)

任意の $n \in \mathbb{Z}$ について

$$(\cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta)^n = \cos n\theta + \mathbf{i}\sin n\theta.$$

従って，$z \in \mathbb{C}$ について

$$\left|z^n\right| = |z|^n, \qquad \arg z^n = n\arg z.$$

---

[5] ド・モワブル (Abraham de Moivre) は 1667 年にフランスに生まれ，1754 年，ロンドンで困窮のうちに没した数学者．解析幾何学や確率論の分野で業績を残した．Newton と親交が深く,『光学』*Optics* の Latin 語版を編集した．Newton が自分の著作について読者から質問されたとき，

Go to Mr De Moivre: he knows these things better than I do.

と言ったのは有名な話である．

4　1のべき根

一般に $w \in \mathbb{C}$ について何乗かすると w になるようなもの，つまり $z^n = w$ をみたすような z を w の**べき根** (*radical*) または n **乗根** (*n-th power root*) と言う．特に，n 乗して 1 になる数，つまり 1 の n 乗根 (*roots of unity*) が重要である．

最近ではオナジミになった 1 の 3 乗根を例にとろう．$z^3 = 1$ をみたす z は $\mathbb{R}$ には 1 だけしかないが，$\mathbb{C}$ には 3 個存在する．それは

$$1, \quad \omega = \frac{-1+\mathbf{i}\sqrt{3}}{2}, \quad \omega^2 = \frac{-1-\mathbf{i}\sqrt{3}}{2} \tag{2}$$

であった．ここでは ω を複号の正の方に定めたが，負の方に定めても 2 乗すると正の方が得られるから，ω はいずれにすることもできる．要するにまとめてこれら 3 個である．

これを，先ほど得られた Theorem of de Moivre から再考し，一般の $n \in \mathbb{Z}^+$ について 1 の n 乗根を考える準備としよう．

$z^3 = 1$ をみたす z を極形式で表して，$z = r(\cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta)$ とする．ここで $z = 0$ はこの方程式をみたさないから，$r \neq 0$ である．Theorem of De Moivre によって

$$z^3 = r^3(\cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta)^3 = r^3(\cos 3\theta + \mathbf{i}\sin 3\theta)$$

である．これを $1 = \cos 0 + \mathbf{i}\sin 0$ と比べてみると，まず絶対値について $r^3 = 1$ であり，$r \geq 0$ であるから，$r = 1$ が解る．次に，平面上で 2 つの vector $\binom{1}{0}$ と $\binom{\cos 3\theta}{\sin 3\theta}$ が一致しているから，偏角について $k \in \mathbb{Z}$ として

$$\arg z^3 = \arg 1 + 2k\pi, \qquad \therefore\ 3\theta = 0 + 2k\pi$$

が成り立つ．これは $3\theta \equiv 0 \pmod{2\pi}$ とも書かれる．従って $\theta = \dfrac{2k\pi}{3}$ $(k \in \mathbb{Z})$ を得る．つまり 1 の 3 乗根の偏角は $\dfrac{2\pi}{3}$ の整数倍である．なるほど，

$$1 = \cos 0 + i\sin 0, \quad \omega = \cos\frac{2\pi}{3} + \mathbf{i}\sin\frac{2\pi}{3}, \quad \omega^2 = \cos\frac{4\pi}{3} + \mathbf{i}\sin\frac{4\pi}{3}$$

となり，先ほどの list (2) に一致する．

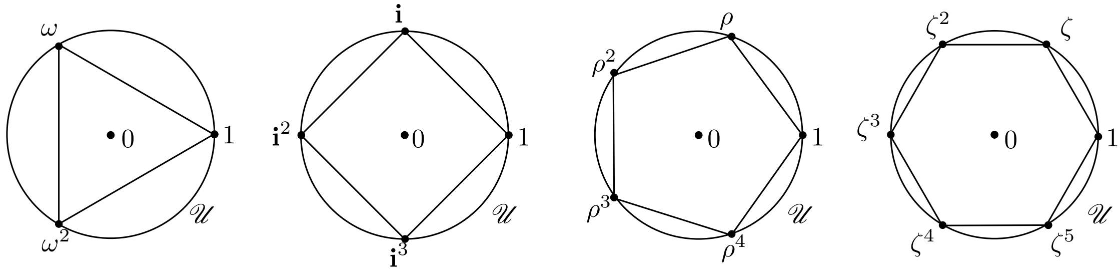
$1, \omega, \omega^2$ の絶対値がすべて 1 であることから，これらは複素数平面上の単位円 $\mathscr{U}_{\mathbb{C}} = \mathscr{U}$，つまり 0 を中心とし半径が 1 である円，の円周上の点である．偏角が $\dfrac{2\pi}{3}$ ずつ増えることに着目すると，これら 3 点は $\mathscr{U}_{\mathbb{C}}$ に内接する正 3 角形の頂点になる．Figure 2 の左を見られたい．

$n = 4, 5, 6$ のときも，同様の考察により単位円に内接する正方形，正 5 角形，正 6 角形が得られることが解る．長くなるので **cis** を用いる．一般に，1 の n 乗根すべてからなる集合を U_n で表そう (1 の 5 乗根の内の 1 つ，$\rho = \mathrm{cis}\,(2\pi/5)$ については後述する．Appendix を参照されたい)：

$$\begin{aligned}
U_3 &= \{1, \omega, \omega^2\} &&= \{\mathrm{cis}\,(2k\pi/3) \mid k = 0, 1, 2\}, \\
U_4 &= \{1, \mathbf{i}, \mathbf{i}^2, \mathbf{i}^3\} &&= \{\mathrm{cis}\,(2k\pi/4) \mid k = 0, 1, 2, 3\}, \\
U_5 &= \{1, \rho, \rho^2, \rho^3, \rho^4\} &&= \{\mathrm{cis}\,(2k\pi/5) \mid k = 0, 1, 2, 3, 4\}, \\
U_6 &= \{1, \zeta, \zeta^2, \zeta^3, \zeta^4, \zeta^5\} &&= \{\mathrm{cis}\,(2k\pi/6) \mid k = 0, 1, 2, 3, 4, 5\}.
\end{aligned}$$

一般化すると，当然...

Figure 2: 1 の 3, 4, 5, 6 乗根



THEOREM 4.1 (1 の n 乗根)

任意の $n \in \mathbb{Z}^+$ について，1 の n 乗根は n 個あり，その集合 U_n は

$$U_n = \Big\{\mathbf{cis}\left(2k\pi/n\right) \,\Big|\, k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots,\, n-1\Big\} \tag{3}$$

である．従って

$$z^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}\Big(z - \mathbf{cis}\left(2k\pi/n\right)\Big) = \prod_{\rho \in U_n}(z - \rho) \tag{4}$$

となる．

Proof.

まず，$\mathbf{cis}\left(2k\pi/n\right)$ を n 乗すると 1 になることは，$k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots,\, n-1$ について de Moivre の定理から

$$\Big\{\mathbf{cis}\left(2k\pi/n\right)\Big\}^n = \mathbf{cis}\left(n \cdot \left(2k\pi/n\right)\right) = \mathbf{cis}\, 2k\pi = 1$$

より確かに成立．また，これらの内に同じものはない (偏角がすべて異なる) から，U_n は n 個の要素を含む．

n 次方程式 $z^n - 1 = 0$ は n 個より多くの解をもつことはあり得ないから，1 の n 乗根は (3) で尽くされ，従って $z^n - 1$ は複素数体 $\mathbb{C}$ においては，(4) のように n 個の 1 次因数に分解される． ■

因数分解を考えるとき，重要なのは**どのような数体上で分解するか?** である．特に n が素数 p のとき，実数体 $\mathbb{R}$ 上 (実際には $\mathbb{Q}$ 上) では

$$z^p - 1 = (z-1)\left(z^{p-1} + z^{p-2} + \cdots + z + 1\right) = (z-1)\Big(\sum_{k=0}^{p-1} z^k\Big)$$

で終わりであるが，複素数体 $\mathbb{C}$ 上では p 個の 1 次因数に分解されて，$U_p = \Big\{1,\, \rho_1,\, \rho_2,\, \ldots,\, \rho_{p-1}\Big\}$ とすれば

$$z^p - 1 = (z-1)(z-\rho_1)(z-\rho_2)\cdots(z-\rho_{n-1}) = \prod_{\rho \in U_p}(z - \rho)$$

となる．

ただし，である．ただ単にバラバラにすればヨイという訳でもあるまい．コロアイというものも必要である．例を $n=5,6$ に採ってみよう．

- $n=5$ のとき．Figure 2 の正 5 角形を見られたい．

$$z^5-1=(z-1)\bigl(z^4+z^3+z^2+z+1\bigr)$$

において，第 2 因子 $z^4+z^3+z^2+z+1$ を 0 としてできる方程式の解は ρ, ρ^2, ρ^3, ρ^4 である．ここで，ρ は偏角が正で最小の解，つまり $\rho=\mathbf{cis}\,\frac{2\pi}{5}$ である．ρ と ρ^4，および ρ^2 と ρ^3 は実軸について対称であるから，互いに他の共役である：$\overline{\rho^4}=\rho$, $\overline{\rho^3}=\rho^2$．従って

$$\rho+\rho^4=\rho+\overline{\rho}=2\Re\rho=2\cos\frac{2\pi}{5},\quad \rho^2+\rho^3=\rho^2+\overline{\rho^2}=2\Re\rho^2=2\cos\frac{4\pi}{5}$$

が成り立つ．更に $\rho\cdot\rho^4=\rho^2\cdot\rho^3=\rho^5=1$ であるから，

i) ρ と ρ^4 は 2 次方程式 $z^2-2\cos\frac{2\pi}{5}\cdot z+1=0$ の解となり，

ii) ρ^2 と ρ^3 は 2 次方程式 $z^2-2\cos\frac{4\pi}{5}\cdot z+1=0$ の解となる．

従って

$$(z-\rho)\bigl(z-\rho^4\bigr)=z^2-2\cos\frac{2\pi}{5}\cdot z+1,\quad (z-\rho^2)\bigl(z-\rho^3\bigr)=z^2-2\cos\frac{4\pi}{5}\cdot z+1$$

が成り立ち，結局 z^5-1 は $\mathbb{R}$ 上で次の分解をもつことが解る：

$$\begin{aligned}z^5-1&=(z-1)\cdot\bigl(z-\rho\bigr)\bigl(z-\rho^4\bigr)\cdot\bigl(z-\rho^2\bigr)\bigl(z-\rho^3\bigr)\\&=(z-1)\Bigl(z^2-2\cos\frac{2\pi}{5}\cdot z+1\Bigr)\Bigl(z^2-2\cos\frac{4\pi}{5}\cdot z+1\Bigr).\end{aligned}\tag{5}$$

- $n=6$ のとき．$\zeta=\mathbf{cis}\,(2\pi/6)=\bigl(1+\sqrt{3}\bigr)/2$ とする．Figure 2 の右端を見られたい．z^6-1 を分解して

$$z^6-1=(z-1)(z+1)\bigl(z^4-z^2+1\bigr)$$

となる．この第 3 因子を 0 と置けば，その解は $z=\zeta,\zeta^2,\zeta^4,\zeta^5$ である．これらについて，$n=5$ の場合と同様に $\zeta^5=\overline{\zeta}$, $\zeta^4=\overline{\zeta^2}$ であるから

$$\zeta+\zeta^5=\zeta+\overline{\zeta}=2\Re\zeta=1,\quad \zeta^2+\zeta^4=\zeta^2+\overline{\zeta^2}=2\Re\zeta^2=-1$$

となる．$\zeta\cdot\zeta^5=\zeta^2\cdot\zeta^4=1$ であるから，

$$(z-\zeta)\bigl(z-\zeta^5\bigr)=z^2-z+1,\quad (z-\zeta^2)\bigl(z-\zeta^4\bigr)=z^2+z+1$$

を得る．もちろんこの第 2 式は，ζ^2 が 1 の虚数立方根 ω に等しいことから明らかでもある．何しろ，次の $\mathbb{R}$ 上での分解を得たことになる：

$$z^6-1=(z-1)(z+1)\bigl(z^2-z+1\bigr)\bigl(z^2+z+1\bigr).$$

一般に，次が成り立つ：

THEOREM 4.2 ($z^n - 1$ **の** $\mathbb{R}$ **上での分解**)

$n \in \mathbb{Z}^+$, $n \geq 3$ について，$z^n - 1$ は実数体 $\mathbb{R}$ 上で 1 次と 2 次の因数に分解できて，次が成り立つ：

$$n\ :\ \text{odd};\quad z^n - 1 = (z-1)\cdot\prod_{k=1}^{(n-1)/2}\Bigl(z^2 - 2\cos\frac{2k\pi}{n}\cdot z + 1\Bigr),$$

$$n\ :\ \text{even};\quad z^n - 1 = (z-1)(z+1)\cdot\prod_{k=1}^{(n-2)/2}\Bigl(z^2 - 2\cos\frac{2k\pi}{n}\cdot z + 1\Bigr)$$

証明は明らかであろう．n について，$l, m \in \mathbb{Z}^+$ を $l + m = n$, $l < m$ となるようにとれば,

$$\cos\frac{2l\pi}{n} = \cos\frac{2m\pi}{n},\quad \sin\frac{2l\pi}{n} = -\sin\frac{2m\pi}{n}$$

となるから，$\mathbf{cis}\,\bigl(2l\pi/n\bigr)$ と $\mathbf{cis}\,\bigl(2m\pi/n\bigr)$ は互いに共役で，その和は $2\cos\bigl(2l\pi/n\bigr)$ となる．これが，n が奇数の場合には $l = 1, 2\ \ldots,\ \dfrac{n-1}{2}$ で，また n が偶数の場合には $l = 1, 2, \ldots, \dfrac{n-2}{2}$ で成り立つから，Theorem 4.2 に言う通りである．

Appendix.　1 の 5 乗根について.

せっかくここまで来たのだから，1 の 5 乗根を代数的に表してみよう．**代数的に** (*algebraically*) という意味は，加減乗除の有理演算とべき根のみを用いてある値を表すことである．それに対して，例えば $\rho = \mathbf{cis}\,\bigl(2\pi/5\bigr)$ のような，超越関数 sin, cos を用いた表現を**超越的** (*transcendental*) と言う．分解 (5)(p. 11)，あるいは Theorem 4.2 から，問題は 2 次方程式

$$z^2 - 2\cos\bigl(2\pi/5\bigr)\cdot z + 1 = 0,\quad z^2 - 2\cos\bigl(4\pi/5\bigr)\cdot z + 1 = 0$$

を解くことに帰着する．よくある話である．以下，**句読点がないのはよどみなく自然に手が動くことを意味する．息を止めてイッキに読むこと．**

$2\pi/5 = \alpha$ とすれば $3\alpha = 2\pi - 2\alpha$ が成り立つからいつも通りの「刺激と反応」によって $\cos\alpha = t$ として 3 倍角を使って $4t^3 - 2t^2 - 3t + 1 = 0$ が成り立ちこの 1 以外の解は $4t^2 + 2t - 1 = 0$ を解けば出るから解こうと思ったがちょっと待てよこれは $2t$ の方程式と考えた方が楽そうだワイと気がついて $2t = \bigl(-1 \pm \sqrt{5}\bigr)/2$ と出てこの値を見たときあぁこれは黄金比に関係するなと思うのが当然だから $t^2 - t - 1 = 0$ の解を γ_+ と γ_- と置けば $\cos(2\pi/5) > 0$ の方を求めているのだから $2\cos(2\pi/5) = 2t = -\gamma_-$ と出来て問題の 2 次方程式の最初の方は $z^2 + \gamma_- z + 1$ だと解り (オレも数学なかなかやるジャン!などとニヤニヤして) じゃついでに第 2 式のほうも作っておくかと思ってここは cos の倍角使ってやろうと思ったとたんに欲しいのは $2\cos 2\alpha$ だから次数下げがひらめいて $2\cos 2\alpha = 4\cos^2\alpha - 2 = 4t^2 - 2 = (1-2t) - 2 = -2t - 1 = \gamma_- - 1 = -\gamma_+$ で「また御出ましカイ」などと感想をもつ間もなく第 2 の方程式は $z^2 + \gamma_+ z + 1 = 0$ と出るのでこれらを解いて 1 の虚数 5 乗根は

$$\rho,\,\rho^4 = \frac{-\gamma_- \pm \sqrt{\gamma_-^2 - 4}}{2} = \frac{-\gamma_- \pm \sqrt{\gamma_- - 3}}{2},\quad \rho^2,\,\rho^3 = \frac{-\gamma_+ \pm \sqrt{\gamma_+^2 - 4}}{2} = \frac{-\gamma_+ \pm \sqrt{\gamma_+ - 3}}{2}$$

である (**息をしてよい**).

... さて夜も更けた．これを $\gamma_\pm$ を使わない形に表して次を得たら，軽い夜食をとりましょうか．

$$\rho,\ \rho^4 = -\frac{1-\sqrt{5}}{4} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{-5-\sqrt{5}}{2}} = -\frac{1-\sqrt{5}}{4} \pm \frac{\sqrt{-10-2\sqrt{5}}}{4} = -\frac{1-\sqrt{5}}{4} \pm \mathbf{i}\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4},$$

$$\rho^2,\ \rho^3 = -\frac{1+\sqrt{5}}{4} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{-5+\sqrt{5}}{2}} = -\frac{1+\sqrt{5}}{4} \pm \frac{\sqrt{-10+2\sqrt{5}}}{4} = -\frac{1+\sqrt{5}}{4} \pm \mathbf{i}\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.$$

... では，もうちょっと勉強して，おやすみなさい．

そして世界が寝静まった頃，ここは誰かの夢の中...

... むにゃむにゃ... $t^4+t^3+t^2+t+1=0$ をとくのにこれはそーはんほーてーしきだからりょーへん t^2 でわると... むにゃむにゃ...

$$t^2+t+1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}=0 \iff \left(t+\frac{1}{t}\right)^2+\left(t+\frac{1}{t}\right)-1=0$$

だから $t+\dfrac{1}{t}=s$ として $s^2+s-1=0$ をといて... むにゃむにゃ... t は 1 の**あれ**だから $\dfrac{1}{t}$ って t の**あれ**でだから s は t の**あれのにばい**... **ニヤニヤ**... むにゃむにゃ... **zzzzzzzzzzzzzzz** ......

Thank You, Everyone.
I hope your math exciting,
your hack happy,
and whole lotta love.

`kymst :)`

東北地方が一刻も早く復興しますよう，
買い占め外道がチゴクに落ちますよう．

`Fri Mar 25 14:37:17 2011 JST`

Documentation Log
Originally written at `Sun Apr 25 23:43:27 2010 JST`
This is version Mar. 2011. (file: `mjkNS06CM.tex`)
PDF version: Release beta-1 file: `mjk06CMbt1.pdf`
Downloadable from `http://kymst.net/mjk`.