MJK math jotter of kymst

New Series, No.**A-1**. version Mar. 2011.

行列と可換性

Article by YAMASHITA, Koichiro.

ⓒMJKns(2011-) Algebra-1. Mon Mar 07 11:38:16 2011 JST

我々の遥かなる始祖は，あるとき，見ることも触ることもできないにも関わらず，数の客体的存在を意識した．それがどの位の過去であるか，残念ながら調べることもできない．しかし，ある時点，ある刹那に，2 人と 3 人で 5 人であること，2 つの林檎と 3 つの蜜柑で 5 つの果物であること，そして，この 2 つの事態の間には，ある種の共構造性が伏在していること，に目を向けた．この共構造性が $2+3=5$ と名付けられるのは，かなりの時代が下ってからのことである．経験から独立した数学的構造の自覚は，こうして人類の原初にまで遡行する．

それは，正整数を世界の構成要素として認めることに他ならなかった．しかし，我々の外界は離散的ではない．空間も時間も連続的である．一方向に並ぶ無限に続く正整数の系列がもつ**離散性** (*discreteness*)，**間隙** (*gap*) を，反対方向，負の無限大への逆進を伴ないつつ，有理数と無理数が埋めた．実数体 $\mathbb{R}$ の生誕である．

では，我々の外界に対する未分化 · 未分節な生 (ナマ) の**空間的直観**を，世界の意識的存在了解へと至らしめるものは何か? 極めて原初的な，多様な「こちらとむこう」の対立，右と左，前と後，上と下，そして昨日と明日，この 4 つの拮抗の内に，我々の生活自体が営まれる．ここに「対立の対立」から「対立の止揚」へと向かう契機がある．右と左を表わす指標と，前と後を表わす指標を，**独立させつつ統一する**こと，これこそが 2 次元 vector 幾何の寄って立つ精神の他ならぬ.「vector とは大きさと向きをもつものである」などという，一知半解なお題目など不要である．互いに説明不能な，2 つの，引き裂かれた動態——つまりは x 成分と y 成分の変化——を，1 つの独立した統一的存在者として把握すること，これこそが我々に問われていたのだ．vector とは，そのままでは雑多であらざるを得ない世界に対して，何かしらの統一的視座を獲得し，それを自覚的立脚点としつつ世界の有り様を凝視しようとする仮説的方略，知の跳躍，飛翔たる冒険以外ではない．

そう，幾つかの変量 x, y, z, ... の変化が，1 つの vector $\boldsymbol{x}$ の動きとして把握された．ここから，我々の次の旅程は始まる．

複数の量の統一体たる vector が複数個与えられたとき，
それらを再び貫く統一原理は存在するのか?
複数個の vector は，纏められて何になるのか?

1 記法上の約束

以下では，次のような表記法についての慣習に従う：

- いくつかの成分のリストとしての vector は，列 vector でも行 vector でも ***bold italic lower case letter*** で表す：$\boldsymbol{a}=\binom{a_1}{a_2}$, $\boldsymbol{b}=(b_1\,b_2)$, etc.

成分が集合 S に含まれるような 2 次元の vector すべてからなる集合を S^2 で，3 次元の vector すべてからなる集合を S^3 で表す.

- vector に添字 (index) を付ける場合には，列 vector については下付きの index (subscript) を，また行 vector については上付きの index (superscript) を用いる：

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}^1 = \begin{pmatrix} b_1^1 \, b_2^1 \, b_3^1 \end{pmatrix}.$$

- n を正整数とし，$i = 1, 2, \ldots, n$ とする．$\boldsymbol{a}_i$ が n 次元列 vector $\boldsymbol{a}_i = \begin{pmatrix} a_i^1 \\ a_i^2 \\ \vdots \\ a_i^n \end{pmatrix}$ であるとき，$\boldsymbol{a}_i$ を順に横に並べれば n 次の正方行列を得る：

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \, \boldsymbol{a}_2 \ldots \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}.$$

この行列 $\boldsymbol{A}$ はまた，$j = 1, 2, \ldots, n$ として，n 個の行 vector $\boldsymbol{a}^j = \begin{pmatrix} a_1^j \, a_2^j \, \ldots \, a_n^j \end{pmatrix}$ を縦に並べた $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}^1 \\ \boldsymbol{a}^2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}^n \end{pmatrix}$ でもあることに注意せよ．このように，一般に行列を ***BOLD ITALIC UPPER CASE*** で表す.

また以下では，成分が集合 S に含まれるような n 行 m 列の行列を $S^{n \times m}$ で表わす．特に $n = m$ のとき，その行列を n **次正方行列** (*square matrix of degree* n) と言い，そのすべてからなる集合を $M_n(S)$ で表わす．ここで，集合 S は，多くの場合，実数体 $\mathbb{R}$ や複素数体 $\mathbb{C}$ である．必要に応じて，今後は $M_n(\mathbb{R})$, $M_n(\mathbb{C})$ を使い分けるが，一般の場合には，集合 S は，加減乗除が自由にできる数集合ならば，行列に関する考察が可能である．そのような一般性が欲しい場合には，数体 $\mathbb{K}$ 上の行列を考えることになる．その場合には，$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in M_n(\mathbb{K})$ の様に断わることにする.

- ページがスカスカになるので，転置演算子 ${}^{\mathrm{T}}$ を定義する．一般に，縦に並んでいるものを横に並べ換えたり，横に並んでいるものを縦に並べ換えたりすることを**転置** (*transposition*) と言う．列 vector $\boldsymbol{a} = \binom{a^1}{a^2}$ を行 vector に直してできる vector，行 vector $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \, b_2 \end{pmatrix}$ を列 vector に直してできる vector を，それぞれ ${}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}$, ${}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$ で表わす：

$${}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a} = {}^{\mathrm{T}}\!\begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1 \, a^2 \end{pmatrix}, \quad {}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} = {}^{\mathrm{T}}\!\begin{pmatrix} b_1 \, b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

この転置演算子は行列にも作用する．$\boldsymbol{A} \in M_2(\mathbb{C})$ が

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \, \boldsymbol{a}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}^1 \\ \boldsymbol{a}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix}$$

であるとき，$\boldsymbol{A}$ に転置を施した転置行列 ${}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ とは，$\boldsymbol{A}$ を主対角線に関して対称に並べ換えて得られるような行列である：

$$
{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \left\{\begin{array}{ccc} {}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2\end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix}{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_1 \\ {}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_2\end{pmatrix} \\ {}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}^1 \\ \boldsymbol{a}^2\end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix}{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}^1 & {}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}^2\end{pmatrix} \end{array}\right\} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix}
$$

となる．転置演算子について，ここでは $\boldsymbol{A} \in M_2(\mathbb{K})$ として示したが，一般の $M_n(\mathbb{K})$，あるいは正方行列でなくても $\mathbb{K}^{n\times m}$ において全く同じ議論ができることに注意されたい．

- n 次の正方行列の全体 $M_n(\mathbb{K})$ の内で，特別な要素，**zero 行列** (*zero matrix*) と**単位行列** (*unit (identity) matrix*) を定義する．すべての成分が 0 であるような行列を zero 行列と呼び，$\boldsymbol{O}$ で表す．特に n 次の行列であることを明示したい場合には $\boldsymbol{O}_n$ と書く．手書きでは，上に横棒を引いて $\overline{\boldsymbol{O}}$ とすると $0 \in \mathbb{R}$ との混同を裂けることができる．

  $\boldsymbol{A} \in M_n(\mathbb{K})$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$ について，$\boldsymbol{A}$ の第 i 行第 j 列の成分，つまり (i, j) 成分を δ^i_j で表わす[1]．この δ を**クロネッカーのデルタ** (*Kronecker's delta*) と言う．$M_n(\mathbb{K})$ の単位行列 $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}_n$ とは

$$
\delta^i_j = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j, \\ 0 & \text{else} \end{cases}
$$

  をみたすような行列である．

  また，$\boldsymbol{I} \in M_n(\mathbb{K})$, $k \in \mathbb{K}$ について，$\boldsymbol{I}$ を k 倍してできる行列 $k\boldsymbol{I}$ を **scalar 行列** (*scalar matrix*) と呼ぶ．つまり

$$
\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \quad k\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} k & & & \\ & k & & \\ & & \ddots & \\ & & & k \end{pmatrix}.
$$

  である．この $k\boldsymbol{I}$ が何故 scalar 行列と呼ばれるかは，明らかであろう．行列 $\boldsymbol{A} \in M_n(\mathbb{K})$ に scalar 行列 $k\boldsymbol{I}(= k\boldsymbol{I}_n)$ をかけるとは，行列 $\boldsymbol{A}$ を scalar k 倍することに他ならないからである：

$$
(k\boldsymbol{I})\boldsymbol{A} = k(\boldsymbol{I}\boldsymbol{A}) = k\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{A}(k\boldsymbol{I}) = k(\boldsymbol{A}\boldsymbol{I}) = k\boldsymbol{A}.
$$

以上で，今後の考察のための準備は整った．行列の乗法について既知であれば，以下を読み進むに困難はなかろう．

2　可換な行列

Scalar ——例えば実数や複素数——と異なり，行列は乗法に関して可換ではない ...... **聞き飽きた!!** $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in M_2(\mathbb{K})$ について，**一般には** $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$ である．こんなこと，適当な行列を 2 つ作って，実際にかけてみれば解る．もしすべての行列がすべての行列に対して非可換であるならば，それでよい．$\boldsymbol{AB}$ と $\boldsymbol{BA}$ の間に一切の関係性が存在しないのなら，行列の乗法に関して可換と非可換を巡って考察すべき何ものも残っていない．その場合には，行列論はもはや理論的深化を望むべくもな

[1] 通常は δ_{ij} と書かれるが，一貫性を大事にして superscript で行を，subscript で列を表わす．

い，掘り尽された廃坑でしかない．しかし，既に我々は scalar 行列はすべての行列に対して可換であることを見た．

行列は，言うまでもなく scalar 量に比べて構造的な複雑さをもつ.「その乗法は向きをもつ」と言ってもよい．単一な要素の積ではなく，構造をもつもの同士の，因果的関係結合である．歯を磨いてからベットに入る人間は多いが，ふとんをかぶってから歯を磨くヤツはあまりいない．綿ソックスを履いてからコンヴァースを履くのが普通で，靴を履いてから靴下を履こうとしたら，かなりアブナイ．2 つの計算機 program P_A と P_B があるとして，どちらも同じ type の input を受理するとしよう．x を P_A に input した output を P_B に input して output y を得ることを $x \mapsto P_A \to P_B \mapsto y$ と表わせば，$x \mapsto P_B \to P_A \mapsto z$ であるとき，$y \neq z$ なのが (普通) 当り前である．ただし例外もある．ベルトをゆるめておいて食べ過ぎることもあるし，食べ過ぎたせいでベルトをゆるめることもある．ネェ，「食欲発散」Highteen Agers!?

従って，問われるべき問題は，

> では，**特に可換なとき，何が起こるか?**
> また，**可換でないときには，我々は何ができるか?**

であるべきであろう．その意味で,「行列は一般には可換でない」というのは，やはり「vector は大きさと向きをもつ 」と同じ，単なるお題目に過ぎぬ．100 回聞かされても，行列に関する理解が深まるわけではない．

> **読むな!!**
> **悶侮禍愕省と，その御用「数学大家」たちは，このお題目が高校数学の行列論だと考えているのかも知れぬが，我々はそれを許さない.「だから何なのか?」という問題世界に実存的自我 = 自覚的「己れ」を置くこと，これこそが，我々の数学を先に進めるのだ!!**
> **ところで，上の一文の「我々」を「共犯者の WE」と言う．ゴメンナサイ...**
> **読むなって言ったのに...**

まずもって我々の目標は，$\boldsymbol{A} \in M_2(\mathbb{K})$ が与えられたとき，その $\boldsymbol{A}$ と可換な $\boldsymbol{X} \in M_2(\mathbb{K})$ は $\boldsymbol{A}$ とどの様な関係をもつか，の考察である．結論を先取りしよう．次の，極めて重要な定理が成り立つ．これを，我々の「行列論の基本定理」と呼ぶことにしよう．今後，これを FTM (Fundamental Theorem of Matrix) と表わす．

THEOREM 2.1 (行列論の基本定理 FTM)

2 次の正方行列 $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{X}$ が可換であるとき，$\boldsymbol{X}$ は $\boldsymbol{A}$ の 1 次以下の整式で表される：

$$\forall \boldsymbol{A}, \boldsymbol{X} \in M_2(\mathbb{K}) : \boldsymbol{AX} = \boldsymbol{XA} \Rightarrow \exists f \in \mathbb{K}[t] : \boldsymbol{X} = f(\boldsymbol{A}) \wedge \deg f \leq 1.$$

ここで，$\mathbb{K}[t]$ とは，係数を体 $\mathbb{K}$ にもつ不定元 (変数)t についての多項式全体の集合——「$\mathbb{K}$ 上の多項式環」と言う——である．また，$\boldsymbol{A} \in M_2(\mathbb{K})$ の多項式 $f(\boldsymbol{A})$ とは，多項式 $f(t)$ が

$$f(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n$$

であるとき t を $\boldsymbol{A}$ に取り換え，また $\boldsymbol{A}^0 = \boldsymbol{I}$ と定めて得られる

$$f(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=0}^{n} a_i \boldsymbol{A}^i = a_0 \boldsymbol{I} + a_1 \boldsymbol{A} + a_2 \boldsymbol{A}^2 + \ldots + a_n \boldsymbol{A}^n$$

のことであると定義する．

しばらくの間，行列は数体 $\mathbb{K}$ 上の 2 次正方行列とする．基本定理 FTM の証明のために，次の 2 つの補題を用意する：

Lemma 2.2

ある行列が，任意の行列と可換ならば，その行列は scalar 行列である．逆も成り立つ．

Proof.

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が任意の行列と可換であるとすれば，特に $\boldsymbol{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{X}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ と可換である．このとき，

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_1 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{X}_1\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \therefore b = c = 0,$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_2 = \begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{X}_2\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}, \qquad \therefore a = d$$

であるから，行列 $\boldsymbol{A}$ は

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = a\boldsymbol{I}$$

となり，確かに scalar 行列である．逆は先程も言及したように明らかである． ■

この Lemma 2.2 は，行列 $\boldsymbol{A}$ と可換な scalar 行列 $a\boldsymbol{I}$ は，行列 $\boldsymbol{A}$ の「**0 次式**」$0\boldsymbol{A} + a\boldsymbol{I}$ で表されることを意味する．

次に，行列の「**線形 (1 次) 独立**」「**線形従属**」について確認しておこう．Vector とまったく同様に定義される．より一般に，n 個のもの $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ と何らかの意味で $0 \in \mathbb{R}$ に対応する $\overline{O}$ があって，$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ の $\mathbb{K}$ 上での 1 次結合

$$\sum_{i=1}^{n} k_i \alpha_i = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_n\alpha_n, \quad \text{where } k_i \in \mathbb{K}$$

が $\overline{O}$ に等しいのは，係数 $k_1, k_2, \ldots, k_n$ がすべて 0 である場合に限るとき，この n 個のもの $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ は $\mathbb{K}$ 上**線形独立** (*linearly independent*) である，と言う．

キチッと定義式に書けば，$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ が $\mathbb{K}$ 上で線形独立であるとは

$$\sum_{i=1}^{n} k_i \alpha_i = \overline{O} \Rightarrow k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0$$

が成り立つことである．また，$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ が線形独立でないとき，つまり「すべてが 0 である」ことはない $k_1, k_2, \ldots, k_n$ が存在して

$$\sum_{i=1}^{n} k_i \alpha_i = \overline{O}$$

が成り立つとき，$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ は $\mathbb{K}$ 上で**線形従属** (*linearly dependent*) である，と言う．α_i を vector とし，$\mathbb{K}$ として実数体 $\mathbb{R}$ を考えれば，通常の vector の独立と従属であるし，$\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = \sqrt{2}$，また $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ と見なせば，1 と $\sqrt{2}$ は有理数体 $\mathbb{Q}$ 上線形独立であること，つまり $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ を意味する．

行列についても同様に，独立と従属が定義される．これを押さえた上で，2 番目の補題を挙げて，証明しよう．

Lemma 2.3

可換な副 3 角行列は互いに線形従属である．

ここで，副 3 角行列とは (2, 2) 成分が 0 であるような 2 次正方行列，つまり $\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$ という形の行列である．

Proof.

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & 0 \end{pmatrix}$ とする．$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{X}$ のいずれかが zero 行列であれば，証明すべきことはない．以下では，いずれも $\neq \boldsymbol{O}$ とする．このとき，

$$\boldsymbol{AX} = \begin{pmatrix} ap+br & aq \\ cp & cq \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{XA} = \begin{pmatrix} ap+cq & bp \\ ar & br \end{pmatrix}$$

であるから，可換性の仮定 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{XA}$ より

$$br = cq,\ aq = bp,\ cp = ar, \quad \therefore\ a : b : c = p : q : r$$

となる．よってある scalar $k \in \mathbb{K}$ について $p = ka$, $q = kb$, $r = kc$ が成り立ち，

$$\boldsymbol{X} = k \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} = k\boldsymbol{A}$$

となり，確かに $\boldsymbol{X}$ と $\boldsymbol{A}$ は線形従属である ■

これで，我々の主定理 FTM (Theorem 2.1) を証明するための準備が整った．もう 1 度，行列論の基本定理 FTM を挙げておこう：

> **行列論の基本定理** FTM (Theorem 2.1).
> 2 つの 2 次正方行列が可換ならば，一方は他方の 1 次以下の整式で表される．

Proof.

$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{X} \in M_2(\mathbb{K})$ について $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{XA}$ が成り立つとする．$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ として，$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{X}$ の (2, 2) 成分 d, s に着目する．scalar 行列の可換性 (Lemma 2.2) によって $d\boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{X} \cdot d\boldsymbol{I}$ が成り立ち，これを $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{XA}$ から辺々引いて

$$\boldsymbol{AX} - d\boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{XA} - \boldsymbol{X} \cdot d\boldsymbol{I} \iff (\boldsymbol{A} - d\boldsymbol{I})\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{A} - d\boldsymbol{I}). \tag{1}$$

ここで $\boldsymbol{A}-d\boldsymbol{I}$ は副 3 角行列であることに注意されたい.

同様に scalar 行列 $s\boldsymbol{I}$ について $\boldsymbol{A}\cdot s\boldsymbol{I}=s\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{A}$ が成り立ち，辺々から $ds\boldsymbol{I}$ を引いて

$$\boldsymbol{A}\cdot s\boldsymbol{I}-ds\boldsymbol{I}=s\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{A}-ds\boldsymbol{I} \iff (\boldsymbol{A}-d\boldsymbol{I})s\boldsymbol{I}=s\boldsymbol{I}(\boldsymbol{A}-d\boldsymbol{I}). \tag{2}$$

2 式 (1), (2) の辺々の差を作れば

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{A}-d\boldsymbol{I})\boldsymbol{X}-(\boldsymbol{A}-d\boldsymbol{I})s\boldsymbol{I}=\boldsymbol{X}(\boldsymbol{A}-d\boldsymbol{I})-s\boldsymbol{I}(\boldsymbol{A}-d\boldsymbol{I})\\ \iff\ &(\boldsymbol{A}-d\boldsymbol{I})(\boldsymbol{X}-s\boldsymbol{I})=(\boldsymbol{X}-s\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}-d\boldsymbol{I}).\end{aligned} \tag{3}$$

$\boldsymbol{X}-s\boldsymbol{I}$ も副 3 角行列であるから，式 (3) は 2 つの 3 角行列 $\boldsymbol{A}-d\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{X}-s\boldsymbol{I}$ が可換であることを意味する．よって Lemma 2.3 よりこれらは線形従属である．つまりある scalar $k\in\mathbb{K}$ によって

$$\boldsymbol{X}-s\boldsymbol{I}=k(\boldsymbol{A}-d\boldsymbol{I}) \iff \boldsymbol{X}=k\boldsymbol{A}+(s-kd)\boldsymbol{I}$$

となり，確かに $\boldsymbol{X}$ は $\boldsymbol{A}$ の 1 次式で表わされた. ■

3 可換性からの帰結

これで我々は主定理の証明を得た．**この主定理から導かれる系 (Corollary) として，Hamilton-Cayley Theorem (HC)** がある．**太字**の部分をよく吟味してほしい．世の行列論で，金科玉条のようにカシコミタテマツラレルこの定理は，我々の主定理から直ちに従う系なのである．で，それ程ありがたい定理ならば，どうやって証明するかが気になるところだが......

そう，あの $\cdots\cdots$ **クラーイクラーイ成分計算**,

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}^2-(a+d)\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}+(ad-bc)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\text{...........}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

... をチャンとやればまだマシなそうで,「大事だから覚えとけ!」というのが大半らしい．先生方，お忙しいのでしょうね.「成分計算でも示すことができる」で終らせている印刷物もあると聞く．世も末である.

$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{K})$ について，対角要素の和 $a+d$ を行列 $\boldsymbol{A}$ の trace と言い，tr$\boldsymbol{A}$ と書く[2]ことはご存知であろう.

伝家の宝刀，Hamilton-Cayley Theorem とは，次の定理である：

THEOREM 3.1 (Hamilton-Cayley (HC))

任意の 2 次正方行列 $\boldsymbol{A}$ について，$\mathrm{tr}\boldsymbol{A}=\tau$, $\det\boldsymbol{A}=\delta$ とすれば,

$$\boldsymbol{A}^2-\tau\boldsymbol{A}+\delta\boldsymbol{I}=\boldsymbol{O}$$

が成り立つ.

[2]Trace (Eng.) はドイツ語の Spur の訳である.「シュプール」は日本語になっている.「白銀にシュプールを描く」など，スキーの滑った跡である．このことから，昔は「跡」と訳されたこともあったらしいが，半世紀以上数学と付き合ってきた筆者 `kymst` さえ real time には知らない.

証明はあっけない．行列 $\boldsymbol{A}$ についての，2 つの整式 $f(\boldsymbol{A})$, $g(\boldsymbol{A})$ があるとき，これらが可換性をもつこと，つまり

$$f(\boldsymbol{A})\cdot g(\boldsymbol{A}) = g(\boldsymbol{A})\cdot f(\boldsymbol{A})$$

は明らかであろう．従って...

Proof.

特に，$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{A}^2$ から副 3 角行列を作る．$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}$ の (2, 2) 成分に着目して

$$\boldsymbol{A} - d\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} a-d & b \\ c & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}^2 - \bigl(bc+d^2\bigr)\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} a^2-d^2 & b(a+d) \\ c(a+d) & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

を作れば，いずれも行列 $\boldsymbol{A}$ の整式であるから可換であり，かつ副 3 角行列であるから，Lemma 2.3 よりこれらは線形従属である．つまり

$$\exists k \in \mathbb{K} : \boldsymbol{A}^2 - \bigl(bc+d^2\bigr)\boldsymbol{I} = k(\boldsymbol{A} - d\boldsymbol{I}).$$

(4) で成分を比べて，$k = a+d = \mathrm{tr}\boldsymbol{A} = \tau$ であるから，移項して右辺を $\boldsymbol{O}$ にすれば，$p \in \mathbb{K}$ として

$$\boldsymbol{A}^2 - \tau\boldsymbol{A} + p\boldsymbol{I} = \boldsymbol{O}$$

という形に整理される．p を求めれば

$$p = -\bigl(bc+d^2\bigr) + d(a+d) = ad - bc = \det\boldsymbol{A} = \delta$$

となり，確かに (HC) が成り立つ． ■

さて，可換性という観点から (HC) を見直してみると，そもそも $\boldsymbol{A}^2$ と $\boldsymbol{A}$ が可換であるからこそ，$\boldsymbol{A}^2$ が $\boldsymbol{A}$ の 1 次式で表わされることが主定理 (FTM) から帰結する．つまり

$$\boldsymbol{A}^2 = f(\boldsymbol{A}) = \alpha\boldsymbol{A} + \beta\boldsymbol{I}$$

となるような，$\mathbb{K}$ 上の多項式 $f(t) = \alpha t + \beta$ が存在することが先験的に成り立っていたわけである．この係数 α, β を行列 $\boldsymbol{A}$ の成分で表わしたとき (HC) を得る，というのが，本来の流れであろう．

今後，3 次の正方行列に考察が進んだときに，極めて重要なものとなる「余因子行列」という概念を定義しておく．と言っても，既にすべての諸君がご存知のものである．これによって，(HC) のより直截的な証明が可能になる．

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K})$ とする．差し当っては，成分は「すべて 0 でない」とする．ある $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K})$ で，積 $\boldsymbol{AB}$ が scalar 行列 $k\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ となるようなものを探そう．

$\boldsymbol{a}^1 = (a\ b)$, $\boldsymbol{a}^2 = (c\ d)$, $\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} q \\ s \end{pmatrix}$ とすると，$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}^1 \\ \boldsymbol{a}^2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1\, \boldsymbol{b}_2 \end{pmatrix}$ である．$\boldsymbol{AB} = k\boldsymbol{I}$ の (1, 2) 成分，(2, 1) 成分に着目して，

$$\boldsymbol{a}^1 \perp \boldsymbol{b}_2 \iff (a\ b) \perp \begin{pmatrix} q \\ s \end{pmatrix} /\!/ \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}^2 \perp \boldsymbol{b}_1 \iff (c\ d) \perp \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix} /\!/ \begin{pmatrix} d \\ -c \end{pmatrix}$$

だから $\boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} d \\ -c \end{pmatrix}$ とできて，このとき

$$\boldsymbol{a}^1 \cdot \boldsymbol{b}_1 = (a\ b)\begin{pmatrix} d \\ -c \end{pmatrix} = \det \boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{a}^2 \cdot \boldsymbol{b}_2 = (c\ d)\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = \det \boldsymbol{A}$$

となる．従って，$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ と定め，$\det \boldsymbol{A} = \delta$ と書けば

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} = \delta \boldsymbol{I}$$

となる．この結果は，$\boldsymbol{A}$ の成分の内に 0 があっても成り立つ．

このようにして作られた行列 $\boldsymbol{B} \in M_2(\mathbb{K})$ を**余因子行列** (*cofactor matrix*) と言い，$\widetilde{\boldsymbol{A}}$ で表す．

もちろん，この余因子行列は，諸君が $\boldsymbol{A}$ の逆行列を求める際にいつも目にしているものであるが，**ちょっと待った!** ここまでの話は，行列式 $\delta = \det \boldsymbol{A}$ が 0 であって，$\boldsymbol{A}$ が正則でない，つまり逆行列をもたないときでも成り立つ命題である．従って，逆行列の存在よりも手前の，より根源的でかつ理論的基底に近い中身なはずである．

より系統的な理論展開をしてみよう．

THEOREM 3.2 (余因子行列)

$\boldsymbol{A} \in M_2(\mathbb{K})$ とその余因子行列 $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ について，$\mathrm{tr}A = \tau$, $\det \boldsymbol{A} = \delta$ とすれば次が成り立つ：

$$\boldsymbol{A}\widetilde{\boldsymbol{A}} = \delta \boldsymbol{I}, \qquad \boldsymbol{A} + \widetilde{\boldsymbol{A}} = \tau \boldsymbol{I}.$$

この第 2 式から，$\widetilde{\boldsymbol{A}} = -\boldsymbol{A} + \tau \boldsymbol{I}$ であるから，余因子行列 $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ は $\boldsymbol{A}$ の 1 次式で表わされ，よって $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ と $\boldsymbol{A}$ は可換である: $\boldsymbol{A}\widetilde{\boldsymbol{A}} = \widetilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{A} = \delta \boldsymbol{I}$.

更に，この第 2 式の両辺に $\boldsymbol{A}$ を乗じれば，第 1 式と合わせて

$$\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A}\widetilde{\boldsymbol{A}} = \tau \boldsymbol{A}, \quad \therefore\ \boldsymbol{A}^2 - \tau \boldsymbol{A} + \delta \boldsymbol{I} = \boldsymbol{O} \quad \text{(HC)}.$$

逆行列の存在条件は，もはやアタリマエの事実となる：

Corollary 3.3

$\boldsymbol{A} \in M_2(\mathbb{K})$ について，$\delta = \det \boldsymbol{A} \neq 0$ であるならば，$\boldsymbol{A}\widetilde{\boldsymbol{A}} = \delta \boldsymbol{I}$ の両辺を $\dfrac{1}{\delta}$ 倍して

$$\boldsymbol{A} \cdot \frac{1}{\delta}\widetilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{I}.$$

従って $\boldsymbol{A}$ の右逆行列は $\dfrac{1}{\delta}\widetilde{\boldsymbol{A}}$ であるが，余因子行列との可換性によって，これは左逆行列でもある．そこで改めて，$\boldsymbol{A}$ の**逆行列** (*inverse matrix*) を $\boldsymbol{A}^{-1}$ と書くことにすれば，次を得る：

$\boldsymbol{A} \in M_2(\mathbb{K})$ が逆行列をもつための必要十分条件は $\delta = \det \boldsymbol{A} \neq 0$ であることであり，このとき逆行列 $\boldsymbol{A}^{-1}$ は $\boldsymbol{A}^{-1} = \dfrac{1}{\delta}\widetilde{\boldsymbol{A}}$ である．$\boldsymbol{A}^{-1}$ が存在するとき，行列 $\boldsymbol{A}$ は**正則である** (*regular*)，**可逆である** (*invertible*) と言われる．

右逆行列と左逆行列が一致するのを確かめたこと，今までにありましたか?

4　群の話をホンの少し

一般に，何らかの要素からなる集合 S があって，S の要素に関する何種類かの演算 (仮に "$*$" と "$\circ$" とする) が定まっているとき，S と $*$, $\circ$ を組にした $(S, *, \circ)$ を**代数系** (*algebraic system*) と言う．例えば，実数をその加法と乗法と組にして $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ を考えれば，これは我々に最も馴染深い代数系，実数体である．

代数系の内で，最も重要な「群」を定義しよう．実数体よりも遥かに単純な代数系である．

ある集合 G 上に 2 項演算 "$*$" が定義されていて，集合 G の任意の 2 つの要素 a, b に演算 $*$ を施すことができて，しかもその演算の結果が再び G の要素になるとき，つまり

$$\forall a, b \in G : a * b \in G.$$

が成り立つとき，G は演算 $*$ について**閉じている**と言う．これを $(G, *)$ の**閉包性** (*closure*) と呼ぶ．

この閉包性の上に，群という概念を定義しよう．

Definition 4.1 (群)

$(G, *)$ が閉包性をもち，更に，次の 3 個の条件が成り立つとする：

(i) 演算 $*$ は**結合的** (*associative*) である：$\forall a, b, c \in G : (a * b) * c = a * (b * c)$.

(ii) G には**単位元** (*identity*) が存在する．この単位元は一意に定まる．e, e_1 のいずれも単位元だとすれば $e = e * e_1 = e_1$ だからである[3]．そこでその単位元を e で表わす：$\forall a \in G : e * a = a * e = a$.

(iii) G のどの要素も**逆元** (*inverse*) をもつ：$\forall a \in G, \exists x, y \in G : a * x = e \wedge y * a = e$.
実際には，逆元はそれぞれの a について一意に定まる．何故なら，$y = y * e = y * (a * x) = (y * a) * x = e * x = x$ だから[4]．そこで，$a \in G$ の逆元を a^{-1} で表わす．

このとき，代数系 $(G, *)$ は**群** (*group*) をなす，と言う．演算 $*$ が了解されていて，誤解の恐れがない場合には，単に「G は群である」,「群 G について」などと言う．また，演算記号については空の記号を使って，$a * b$ を単に ab と書く．

以上の群の定義には，演算の可換性が仮定されていないことに注意せよ．特に群の演算が可換性をもつとき，その群を**可換群** (*commutative group*) または **Abel 群** (*Abelian group*) と言う．諸君は多

[3] 1 つめの等号は e_1 が単位元であることから，また 2 つめの等号は e が単位元であることから，従う．**ヘリクツ!** と言うなかれ．

[4] この**ヘリクツ**も follow せよ．具体的には，すべての等号の根拠を挙げよ．

くの群をご存知である．$(\mathbb{R},+)$，$(\mathbb{C},+)$ など．また，$\mathbb{R}$ や $\mathbb{C}$ から 0 を除いた集合を $\mathbb{R}^\times, \mathbb{C}^\times$ と表わせば，$(\mathbb{R}^\times,\cdot)$，$(\mathbb{C}^\times,\cdot)$ も群であり[5]，すべて可換群である．

非可換な群の例として......，ネェ，`kymst` の魂胆，見えたでしょ？ だとすれば，貴君は，貴女は,「一般線形群」という概念の入り口に立っていることになる．

Definition 4.2 (一般線形群)

$n \in \mathbb{Z}^+$, $n \geq 2$ とし，また $\mathbb{K}$ を体とする ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ と考えておいて不都合はない)．正則な n 次正方行列の全体は，行列の乗法を演算として群をなす．**役にも立たないお題目から**，この群は非可換な群である．この群を体 $\mathbb{K}$ 上の n **次一般線形群** (*general linear group of degree* n *over* $\mathbb{K}$) と呼び，$GL_n(\mathbb{K})$ で表わす．

$GL_n(\mathbb{K})$ が群をなすことは，ほとんど明らかであろう．n 次の正方行列は乗法について閉じていて (閉包性)，結合的であり，単位元が存在し (単位行列... **マンマ**デスネ)，正則だからどの元も逆元をもつ (逆行列... **マタマタマンマ**) からである．

次に，部分群という概念を定義する．これも明らかである．群 $G = (G, *)$ が与えられたとする．G の部分集合 H が群 G と同じ演算 $*$ について群をなすとき，$H = (H, *)$ を群 G の**部分群** (*subgroup*) と呼ぶ．例えば，有理数の全体と加法について $(\mathbb{Q},+)$ は群である．この群は部分群 $(\mathbb{Z},+)$ をもつ．

現下の我々に関係深い例を挙げれば...

Definition 4.3 (特殊線形群)

一般線形群 $GL_n(\mathbb{K})$ を考える ($n = 2$ として支障はない)．$GL_n(\mathbb{K})$ の要素 (つまり n 次の正方行列) の内で，特に行列式が 1 であるものの集合を考えると，この集合はやはり行列の乗法に関しで非可換な群をなす．この群を $\mathbb{K}$ **上の** n **次特殊線形群** (*special linear group of degree* n *over* $\mathbb{K}$) と呼び，$SL_n(\mathbb{K})$ と表わす：

$$SL_n(\mathbb{K}) \overset{\text{def}}{=} \left\{ \boldsymbol{A} \in GL_n(\mathbb{K}) \,\middle|\, \det \boldsymbol{A} = 1 \right\}.$$

実際にこれが群をなすことの証明は容易である．結合性は $GL_n(\mathbb{K})$ から引き継がれるし，$\det \boldsymbol{I} = 1$ だから $SL_n(\mathbb{K})$ は単位元を含む．後は閉包性と逆元の存在であるが，ここは大事である．意外に意識されていない命題として，次がある：

THEOREM 4.4 (行列式の乗法性)

行列の積の行列式の値は，行列式の積に等しい：

$$\forall \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in M_n(\mathbb{K}) : \det(\boldsymbol{AB}) = \det \boldsymbol{A} \cdot \det \boldsymbol{B}.$$

もちろん，我々は今のところ 2 次正方行列の行列式しか手にしていないから，一般の n については主張できないが，あくまでも今のところである．$M_n(\mathbb{K})$ についての行列式が定義された途端に，この命題は意味をもつ．それが,「$n = 2$ としておいて支障はない」と言った下ゴコロである．

---

[5]何故，0 を除いた集合を上付きの $\times$ で表わすか，その理由もこれで納得できるはずである．0 を除けば，すべての要素が逆元をもち，よって乗法について群をなすからである．

この Theorem 4.4 によって，Definition 4.3 で定義された特殊線形群が確かに群となることが，直ちに示される：$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in SL_n(\mathbb{K})$ とすれば，$\det \boldsymbol{A} = \det \boldsymbol{B} = 1$ であるから，乗法性によって $\det(\boldsymbol{AB}) = \det \boldsymbol{A} \cdot \det \boldsymbol{B} = 1 \cdot 1 = 1$ である．よって $\boldsymbol{AB} \in SL_n(\mathbb{K})$ となり閉包性が成り立つ．また，逆元の存在についても $\det \boldsymbol{I} = \det\bigl(\boldsymbol{AA}^{-1}\bigr) = \det \boldsymbol{A} \cdot \det \boldsymbol{A}^{-1}$ であるから，$\det \boldsymbol{A} = 1$ ならば $\det \boldsymbol{A}^{-1} = 1$ となり，確かに $SL_n(\mathbb{K})$ は逆元を含む．これで，特殊線形群はその名に恥じず，群であることが示された．

5 可換性よ，汝何処へ?

さて，2 次の一般線形群 $GL_2(\mathbb{K})$ は，群の演算として乗法をもっている以上，可換な群ではない．お題目の通りである．しかし，その部分群には可換なものがある．まずは $GL_2(\mathbb{K})$ はすべての scalar 行列からなる集合を含む．この集合は $GL_2(\mathbb{K})$ の部分群であることを確かめるのは容易である：scalar 行列の積はやはり scalar 行列であるから，閉包性が成り立つ．結合性は明らかだし，単位元は単位行列 $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}_2$ である．また scalar 行列 $k\boldsymbol{I}$ の逆元は $\dfrac{1}{k}\boldsymbol{I}$ である．従って確かに，scalar 行列全体からなる集合は $GL_2(\mathbb{K})$ の部分群である．更に，冒頭で述べたように，scalar 行列は任意の行列と可換であるから，特に scalar 行列同士も可換である．

このように，一般に非可換な群 G があるとき，G の要素の内で，G の任意の要素 x と可換であるようなものを集めてできる集合は G の可換な部分群となる．この部分群を群 G の**中心** (*center of* G) と呼び，$C(G)$ と表わす:

$$C(G) \stackrel{\text{def}}{=} \bigl\{a \in G \bigm| \forall x \in G : ax = xa\bigr\}$$

一般の場合について，定理として示しておこう．以下では，行列とは相対的に別個なものとして，一般の抽象的な群についての定理は Proposition と呼び，我々の主題である行列に関する定理を Theorem として区別する．

Proposition 5.1 (非可換な群の中心)
群 G の中心 $C(G)$ は G の可換な部分群である．

Proof.

$a, b \in C(G)$ とすれば，その積 ab は任意の $x \in G$ について

$$(ab)x = a(bx) = a(xb) = (ax)b = (xa)b = x(ab)$$

であるから，ab も任意の $x \in G$ と可換である．よって $C(G)$ の閉包性が示された．結合性は群 G から引き継がれるし，単位元 e は G の任意の元と可換であるから $e \in C(G)$ である．$a \in C(G)$ について，その逆元 a^{-1} も $C(G)$ に含まれることは，次のように示される：任意の $a \in C(G)$ と任意の $x \in G$ について $ax = xa$ が成り立つ．この両辺に左右から a^{-1} を乗じれば

$$a^{-1}(ax)a^{-1} = a^{-1}(xa)a^{-1}, \quad \therefore\ xa^{-1} = a^{-1}x$$

が言えるから，$a \in C(G)$ について，その逆元 a^{-1} も G の任意の元と可換となり，$a^{-1} \in C(G)$ である．

以上より，非可換な群 G の中心 $C(G)$ は G の可換な部分群であることが示された．

■

従って，Lemma 2.2 (p.5) と合わせて，我々は次のように主張することができる：

THEOREM 5.2 (中心としての scalar 行列全体)

一般線形群 $GL_2(\mathbb{K})$ の部分集合としての scalar 行列の全体

$$K = \left\{ k\boldsymbol{I} \in GL_2(\mathbb{K}) \,\middle|\, k \in \mathbb{K} \right\}$$

は，$GL_2(\mathbb{K})$ の中心 $C(GL_2(\mathbb{K}))$ に他ならない．

さて，再び群の話の一般論に戻る．中心は群のすべての元と可換であるような部分群であったが，この条件を弱めて，ある特定の元と可換であるようなものの集合を考えよう．まず定義しておく：

Definition 5.3 (中心化群)

非可換群 G の特定の要素を固定し，それを c とする．G の要素の内で，c と可換なものを集めた G の部分集合を $Z_G(c)$ と表わし，これを G における c の**中心化群** (*centralizer*) と言い，$Z_G(c)$ で表わす：

$$Z_G(c) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x \in G \,\middle|\, cx = xc \right\}, \text{ where } c \in G \text{ fixed.}$$

中心化群の名に偽りはない．確かに非可換群 G の，ある $c \in G$ の G における中心化群 $Z_G(c)$ は，G の可換な部分群になることが，Proposition 5.1(previous page) とまったく同様に示される．任意の $a, b \in Z_G(c)$ と c について $ac = ca$, $bc = cb$ が成り立つから

$$(ab)c = a(bc) = a(cb) = (ac)b = (ca)b = c(ab)$$

となり，積 ab も c と可換性をもつ．よって $ab \in Z_G(c)$ より閉包性が成り立つ．結合性は群 G の結合性を引き継いでいるし，単位元 e は c と可換だから $e \in Z_G(c)$ が成り立つ．逆元についても，先程と同様に任意の $a \in Z_G(c)$ について $ca = ac$ であるから，この両辺に左右から a^{-1} を乗じて

$$a^{-1}(ca)a^{-1} = a^{-1}(ac)a^{-1}, \quad \therefore\ a^{-1}c = ca^{-1}$$

となり，a^{-1} も c と可換である．よって $a^{-1} \in Z_G(c)$ となり，$Z_G(c)$ の任意の元は逆元をもつ．以上から，$Z_G(c)$ は確かに群 G の部分群となる．■

群 G に関して，その中心 $C(G)$ と，$c \in G$ についての中心化群 $Z_G(c)$ との関係について述べて，一般の群の話を切り上げることにしよう．次の系は明らかであろう：

Proposition 5.4 (中心と中心化群)

中心化群 $Z_G(c)$ の，すべての $c \in G$ に渡る共通部分は G の中心 $C(G)$ である：

$$\bigcap_{c \in G} Z_G(c) = C(G).$$

中心とは群の**すべての**元と可換な元の集合であり，群のそれぞれの要素と可換な元からなる中心化群の，すべての共通部分を作れば，それは中心に一致することは直ちに解る．■

多少まぎらわしいところではあるが，中心化群はそれ自体としては，一般には可換群ではない．つまり $cx = xc$, $cy = yc$ からは $xy = yx$ は帰結しない．注意してほしい．

ところで...... では，この非可換群 G を，特に 2 次の一般線形群 $GL_2(\mathbb{K})$ としたとき，ある $\boldsymbol{A} \in GL_2(\mathbb{K})$ についての中心化群 $Z_{GL_2(\mathbb{K})}(\boldsymbol{A})$ はどの様なものになるか．

行列論の基本定理 FTM (Theorem 2.1 (p.4)) と，中心化群の概念 (Definition 5.3 (p.13)) を結びつければ，この問に対する答は明らかであろう．我々は，次を得たことになる：

THEOREM 5.5 (中心化群としての行列の多項式)

$\boldsymbol{A} \in GL_2(\mathbb{K})$ について，$\boldsymbol{A}$ に関する $GL_2(\mathbb{K})$ の中心化群 $Z_{GL_2(\mathbb{K})}(\boldsymbol{A})$ は，$\mathbb{K}$ 上の $\boldsymbol{A}$ の多項式からなる集合である：

$$\forall \boldsymbol{A} \in GL_2(\mathbb{K}) : Z_{GL_2(\mathbb{K})}(\boldsymbol{A}) = \left\{ f(\boldsymbol{A}) \,\middle|\, f \in \mathbb{K}[t] \right\}.$$

$\boldsymbol{A}$ の多項式同士は可換であるから，この中心化群は可換群になる．更に，Hamilton-Cayley Theorem (Theorem 3.1 (p.7)) と合わせて，この多項式 $f(t)$ の次数は 1 次以下にすることができる．

そして，中心と中心化群の関係を述べた Proposition 5.4 を，特に $G = GL_2(\mathbb{K})$ としてみると，すべての $\boldsymbol{A} \in GL_2(\mathbb{K})$ に関する中心化群——つまりは多項式の集合——の共通部分は scalar 行列の集合となるから，これによって我々は Theorem 5.2 (p.13) の精緻化に至る．これを図式にしたのが，次の Map 5.6 である．

Map 5.6

一般の群 G, その中心化群 $Z_G(c)$，中心 $C(G)$ と，一般線形群 $GL_2(\mathbb{K})$，行列 $\boldsymbol{A}$ の多項式の集合，scalar 行列の集合は，次の対応をもつ：

$$\begin{tikzcd}
\begin{array}{c}\text{abstract}\\ G\end{array} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "c"'] & \begin{array}{c}\text{concrete}\\ GL_2(\mathbb{K})\end{array} \arrow[d, "\boldsymbol{A}"] \\
Z_G(c) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\cap_c"'] & \mathbb{K}[\boldsymbol{A}] \arrow[d, "\cap_{\boldsymbol{A}}"] \\
C(G) \arrow[r, "\sim"] & \mathbb{K}[\boldsymbol{I}].
\end{tikzcd}$$

ここで，$\mathbb{K}[\boldsymbol{A}]$ は $\mathbb{K}$ に係数をもつ行列 $\boldsymbol{A}$ の多項式の集合 $\left\{ f(\boldsymbol{A}) \,\middle|\, f \in \mathbb{K}[t] \right\}$ を，また $\mathbb{K}[\boldsymbol{I}]$ は $\mathbb{K}$ 上の scalar 行列の集合 $\left\{ k\boldsymbol{I}_2 \,\middle|\, k \in \mathbb{K} \right\}$ を表わす．下向きの矢については説明不要であろう．1 つの要素を選びとったり，共通部分を作ったりすることを表わしている．□

では，右向きの矢は?

6　抽象性とタワゴト

Map 5.5 において，右側の系列，つまり抽象的な群とそのある種の部分群の系列，と，左側にある行列のもつ可換性に関する代数的な構造との間に，何ら関係性を見て取らない者は皆無であろう．右にある数学的真理は，すべて，実体性を保証されていない左側の「約束ごと」の内に，最初から含まれているのだ．具体的なものはいくらでもある．しかしそれらが，すべて右にある抽象理論の中で処理できるならば，どうして，その度ごとに，それらを別々なものとして取り上げなければいけないのか? 抽象的な群論の中で証明しておけば，それで済むではないか? 群の公理 Definition 4.1 (p.10) から証明された命題は，すべての群について成り立つ．ならば，新たな対象を見い出したときには，それが群であることさえ示せば，後は群論の教科書に書いてある通りの定理が成り立つのだ．用語さえ読み換えれば，それでいい . . . .

筆者 `kymst` は，数学上の出自として，これにかなり近い思想圏のなかで生きてきた．一方で数学は，出来る限りの一般性を欲するが故に，抽象的な理論構成を目指す．その抽象性により，現代数学は科学であるよりも抽象芸術に似ていると言われることさえある.「無慈悲な抽象性」，それが数学を志す者が格闘を覚悟しなければならない相手かもしれぬ．1970 年代，圏論 (Category theory) という分野が広まり始めたころ，その果てしない一般性，抽象性への貪欲さ故に，圏論研究者は後ろ指を指されながら次の **自虐 GAG** Joke 6.1 を「楽しんだ」．圏など知らなくても「楽し」めるはずである．

Joke 6.1 (Category Theory)

Category is the most general, and the most abstract ... non sense. □

しかし，抽象化は存在論ではない．理論を作るための方法論である．抽象化が自己目的化されるとき，何もかも抽象的でないと理論ではない，という，数学の内容的空洞化が生じるのは当然であろう．次の Definition 6.2 を見られたい：

Definition 6.2 (過朗系)

過朗系とは代数系 $\mathscr{K} = (R, P, S, D, M, f, g, \mathscr{O}, h_i)$ である．ここで R はユークリッド 3 次元空間の有界部分，P は参加者からなる有限集合，S は index をもつ曲の集合，D は飲み物の集合，M はマイクの集合，f は P 上で定義された S の部分集合の族への写像，g は P から D への全単射，$\mathscr{O}$ は P の要素を項にもつ，$\mathbb{Z}^+$ によって添数付けられた (一般には重複を許す) 有限列で，h_i $(i \in \mathbb{Z}^+)$ はそのぞれぞれの項に M, S の要素からなる順序対 (m, s) を対応させる写像である[6]. □

我々が我々の数学を先に進めるために必要とされるもの，それは，目の前にある数学的対象の「手触り」だと思う．もちろんそれは，程度の差があれ何らかの抽象性をもつ．この document の冒頭に触れた $2+3=5$ でさえ，決して具象的なものではない．しかし，例え抽象的なものであっても，我々の数学という行為は，それを相手にしている，という意味でその対象に手触りを感じるはずである．もし,「相手」がまったくの無味無臭，目にも見えず手応えもないものならば，何かを「相手」にした行為でさえない．つまりは数学ではないのだ．

[6]Hans Freudenthal: *Weeding and Sowing.*(Dordrecht, 1978) の秀逸なパロディー「会議の数学的理論」を手本として筆者 `kymst` が捏造した．過朗系は「KARAOKE」と呼ばれることもある (**クルシイ...**).

近づいて一部を凝視し，後ろに下がって全体像を目に収め，アッチをいじったり，コッチに触ってみたり，...... という主体が対象と取りもつ実存的関わりの内に，対象はそのあるべき場所に収まる．その，それぞれのもののあるべき場所を記述したものが，Map としての理論である．

その Map はしかし，多重な構造をもつ．通常の地図が 2 次元への射影であるのに対して，高次元空間への射影である[7]．視座 · 観点ごとに，1 つの対象は様々な姿を見せる．1 つの観点から描かれた 1 枚の地図は，何枚も纏められて高次元の地図となる．そこで重要なのは，個々の対象の特質であるよりも，それらの関係性そのものである．ここに，抽象化の萌芽がある．理論は，やはり理論としての対象領域の広汎性を目指すとき，抽象的なものになるのであろう．しかし，その抽象性は，対象の手触りから乖離したものであってはならない．否むしろ，その抽象性そのものが具象的なもの，手触りのあるもの，として，我々の相手たるべく立ち現われるのではないか．抽象化された群構造が，具象的対象たる行列の内に実現していること，このことを忘却した抽象性に数学的理論としての潤いはない．あるのは non sense であり，KARAOKE Theory の如きタワゴト，空理空論である．

その意味でこそ，我々は Hamilton-Cayley の内の一方，Arthur Cayley (1821-1895) が，行列の，我々の眼からして決っして見やすいとは言えぬ表現法を工夫しながら，定理 (HC) を帰納的に発見したときの喜びを共有することができる．1858 年の『ロンドン王立協会哲学紀要』(*Philosophical Transactions of Royal Society of London*, vol.148) に，Cayley は “A Memoir on the Theory of Matrices” という論文を発表した[8]．

Figure 1: 気持ちは解るが......

55. As examples of the composition of rectangular matrices, we have

$$\left(\begin{array}{l} a, b, c \\ d, e, f \end{array}\right) \between \left(\begin{array}{l} a', b', c', d' \\ e', f', g', h' \\ i', j', k', l' \end{array}\right) = \left(\begin{array}{l} (a, b, c \between a', e', i'),\ (a, b, c \between b', f', j')\,(a, b, c \between c', g', k'),\ (a, b, c \between d', h'\ l') \\ (d, e, f \between a', e', i'),\ (d, e, f \between b', f', j')\,(d, e, f \between c', g', k'),\ (d, e, f \between d', h'\ l') \end{array}\right),$$

and

$$\left(\begin{array}{l} a, d \\ b, e \\ c, f \end{array}\right) \between \left(\begin{array}{l} a',\ b',\ c',\ d' \\ e',\ f',\ g',\ h' \end{array}\right) = \left(\begin{array}{l} (a,\ d \between a',\ e'),\ (a,\ d \between b',\ f'),\ (a,\ d \between c',\ g'),\ (a,\ d \between d',\ h') \\ (b,\ e \between a',\ e'),\ (b,\ e \between b',\ f'),\ (b,\ e \between c',\ g'),\ (b,\ e \between d',\ h') \\ (c,\ f \between a',\ e'),\ (c,\ f \between b',\ f'),\ (c,\ f \between c',\ g'),\ (c,\ f \between d',\ h') \end{array}\right).$$

行列，matrix (pl. matrices) という用語が使われたのも，この論文が最初である．その中で Cayley は，後日彼の名を冠せられることになる定理を，(`kymst` にはそう読めるのだが，かなりハイになって)

> ... I obtain the remarkable theorem that any matrix whatever satisfies an algebraical equation of its own order,...

として明らかにする (p.476)．ただし，証明は 3 次正方行列で止めて，p.483 で

> (... but) I have not thought it necessary to undertake the labour of a formal proof of the theorem in general case of a matrix of any degree.

としてスッポカス．証明を与えたのが，もう一人の方，Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) であった ... ということで，ここまでにしておこう．

東北で被災し亡くなられた方々のご冥福を，心よりお祈りしたいと思います．

(Wed Mar 16 15:57:26 2011 JST. `kymst`)

[7] その意味で，パブロ・ピカソを筆頭とするキュビズムは，まさにそれをやっている．多視点からの同時的高次元射影!!

[8] *The Collected Mathematical Papers of Arthur Cayley*, vol.2(1889), pp.475-496 に再録されている．Pdf file が Michigan 大学の図書館から down load できる (`http://quod.lib.umich.edu/`)．Figure 1 は，その p. 491 から転写した．