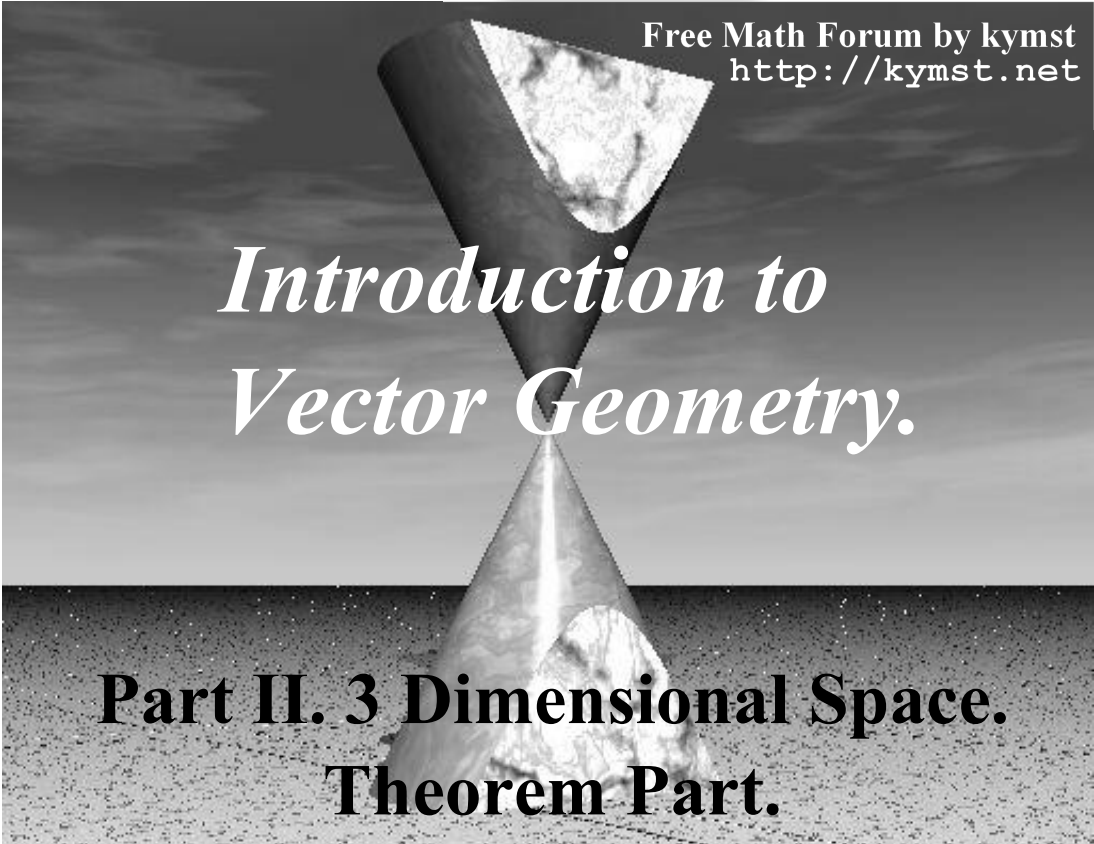


M3P

2012/06/17 (Sun) at Shinjuku
Lecturer: YAMASHITA, Koichiro

Free Math Forum by kymst
<http://kymst.net>



Introduction to Vector Geometry.

**Part II. 3 Dimensional Space.
Theorem Part.**

M3 β

Introduction to
Vector Geometry. Part 2.
Three Dimensional Space.
THEORY part.

Department of Math.

YAMASHITA, KOICHIRO.

F_MF_k(Free Math Forum of kymst) <http://kymst.net/>

June 17 (Sun), 2012 at Shinjuku.

Contents

Lecture 1	Vector 空間 $\mathcal{V}_3$	1
1.1	空間の基底と 4 点の共面条件	1
1.2	正規直交基底と座標空間	4
1.3	$\mathbb{R}^3$ における直線	9
1.4	Vector の外積	10
Lecture 2	$\mathcal{V}_3$ における平面	15
2.1	外積を再び	15
2.2	E_3 における平面と直線の垂直	20
2.3	$\mathcal{V}_3$ における平面の表現	25
Lecture 3	Vector 空間 $\mathcal{V}_3$ における解析	31
3.1	空間における直線と平面	31
3.2	平面と直線の位置関係	38

Lecture 1

Vector 空間 $\mathcal{V}_3$

§ 1-1.

空間の基底と 4 点の共面条件

さて、これ以降我々は、3 次元 vector 空間の考察に入ることになる。空間においても、定点 O が定まれば、任意の点 P の位置 vector $\overrightarrow{OP}$ が定まるから、点と vector は 1 対 1 に対応する。そこで、この 3 次元空間を

3 次元 vector 空間 three Dimensional Vector Space

と呼び、 $\mathcal{V}_3$ で表す。

2 次元空間 $\mathcal{V}_2$ 、つまり vector 平面と、3 次元空間 $\mathcal{V}_3$ の違いは、次の 2 点にまとめられる：

- 基底をなす vector の個数.
- 3 点の共線条件 ($\mathcal{V}_2$) に対応する 4 点の共面条件 ($\mathcal{V}_3$).

これ以外の、vector の加法や scalar 倍の演算法則、内積の性質その他は、平面の場合と変わらない。従って平面 $\mathcal{V}_2$ で成り立つ定理をそのまま用いることができる。

ところが、平面と異なり、空間では、vector 同士の乗法としてもう 1 つ、

vector の外積，クロス積 (outer product, cross p., vector p.)

という演算が定義される。というよりも、それを定義してやると、空間内の幾何学的対象の性質を考察する際に、極めて便利である。そこで、この Lecture 1 では、上にあげた $\mathcal{V}_2$ と $\mathcal{V}_3$ の違いをなす 2 点と、この外積という演算を中心に考察する。

本格的な座標空間 $\mathbb{R}^3$ の解析幾何は、次の Lecture で展開されることになろう。

では本題に入ろう。特に断らない限り、始点を O と定める。

平面では、次が基本的であった：

平面 $\mathcal{V}_2$ では、共線でない 3 点 (OAB) が与えられれば、任意の点 P の位置 vector $\overrightarrow{OP}$ は、適当な実数 α, β を用いて

$$\overrightarrow{OP} = \alpha \overrightarrow{OA} + \beta \overrightarrow{OB}$$

の形に表される。かつその表し方は一意的である。

形式的な表し方をすれば、次のようになる：

$$\forall \vec{p} \in \mathcal{V}_2, \exists ! \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \vec{p} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}.$$

ここで、記号“ $\exists !$ ”は一意的存在、つまり、存在しかつそれが一意的に定まることを表す。上の表現では、実数 α, β がただ一つずつ存在することを表している。直訳すれば、

任意の $\vec{p}$ について、それぞれ α, β がただ 1 つ存在して、 $\vec{p} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}$ が成り立つ

となる。

平面では、3 個以上の点が同一直線上に存在するとき、それらの点は『共線である (collinear)』と言った。空間でこれに対応する概念は、4 個以上の点が同一平面上に存在することである。このとき、

これらの点は共面である (coplanar)

と言う。この『共面性』という概念を上手に使うことによって、vector は空間における幾何学的対象の考察のための強力な道具となる。

先ほどの、平面 vector の表現の一意性に対応する、空間に関する命題を定理として挙げておこう。A ($\vec{a}$), B ($\vec{b}$), C ($\vec{c}$), P ($\vec{p}$) とする。

THEOREM 1.1 ($\mathcal{V}_3$ の基底 vector とその 1 次結合)

空間 $\mathcal{V}_3$ では、共面でない 4 点 (O A B C) が与えられれば、任意の点 P の位置 vector $\vec{OP}$ は、適当な実数 α, β, γ を用いて

$$\vec{OP} = \alpha \vec{OA} + \beta \vec{OB} + \gamma \vec{OC}$$

の形に表され、かつその表し方は一意的である。

つまり

$$\forall \vec{p} \in \mathcal{V}_3, \exists ! \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} : \vec{p} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c}.$$

Proof.

証明は明らかであろう。原点 O を 1 つの頂点とし、 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を各辺の方向 vector とする平行 6 面体を、 $\vec{p}$ を対角線とするように作ればよい。Figure 1.1 (p. 2) を見られたい。 ■

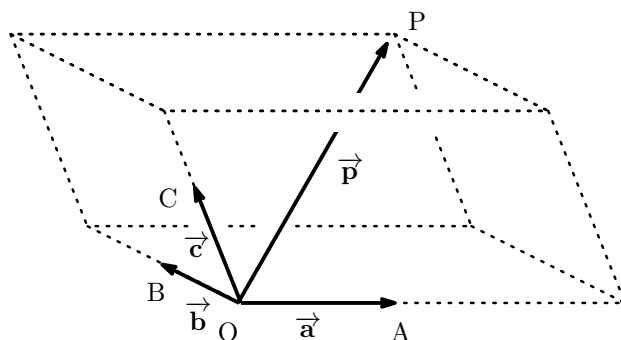


Figure 1.1: 独立な vector の 1 次結合

このように、vector 空間 $\mathcal{V}_3$ においては、1 次独立な 3 個の vector を選ぶことによって、他の任意の vector はそれら 3 個の vector の 1 次結合として表すことができ、またその 1 次結合は一意的に決定する。つまり

$$\vec{p} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c}$$

の係数 (scalar) α, β, γ が, 任意に与えられた $\vec{p}$ ごとにただ 1 つに決定する.

従って, 3 個の vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を選ぶことは, その空間全体, つまりユークリッド空間 E_3 — それはまた vector 空間 $\mathcal{V}_3$ でもあるが — の全体を, 3 個の実数の順序をもつ組^{1.1} (α, β, γ) の集合と 1 対 1 に対応させることと同値である.

それ故に, 空間 E_3 に 1 次独立な 3 個の vector を与えることは, その空間 E_3 のすべての点を決定することに等しい. そこで, その 1 次独立な vector を,

空間 E_3 の基底 vector (basis vector, basic vector)

と言う. 基底 vector は, 1 次独立である限りで自由に取ることができる. 逆にいえば, 基底 vector を定めることが, ノッペラボーのユークリッド空間 E_3 に尺度と地図を与えることである. それが与えられたとき, ノッペラボーだった E_3 は vector 空間 $\mathcal{V}_3$ としてその正体を明かすのだ.

その正体の一端である,

4 点の共面条件

に話を進めよう. 平面上の 3 点の共線条件と類比的に, 4 点の共面条件を次のようにまとめることができる:

THEOREM 1.2 (空間における 4 点の共面)

3 次元 vector 空間 $\mathcal{V}_3$ に, 共面でない 4 点 (OABC) が与えられたとき, 3 点 (ABC) が定める平面を π とする.

第 4 の点 P が π 上に存在することは, 次が成り立つことと同値である:
 $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ が存在して,

$$\vec{OP} = \alpha \vec{OA} + \beta \vec{OB} + \gamma \vec{OC} \quad \text{かつ} \quad \alpha + \beta + \gamma = 1. \quad (1.1)$$

Figure 1.2 (p. 4) を見られたい. 形式的に書けば

(PABC) : coplanar

$$\iff \exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} : \vec{p} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c} \quad \text{かつ} \quad \alpha + \beta + \gamma = 1.$$

Proof.

DO IT YOURSELF! ■

このように重要な定理に出会ったとき, 諸君のなすべきことはただ一つ,

自分に最も fit する言い換えを探すこと

である. 一例は次である:



4 番目の点が共面であるとは, それが, 係数の和が 1 である 1 次結合で表されることだ.

^{1.1}ordered triple. これを『3 項対』と訳している翻訳家がいるが, 日本語も英語も解ってない.『対』の意味を知らないであろう. 今後我々は『3 項列』と呼ぶことにする.『列』という文字には, 順序が定まっているという意味が内包されている. 順列, 数列などである. それに対して, 順序を問題にしない 3 個のもののからなる場合には, それを『3 項組』と言おう. 英語で単に ‘triple’ といった場合にはこちらの意味になる.

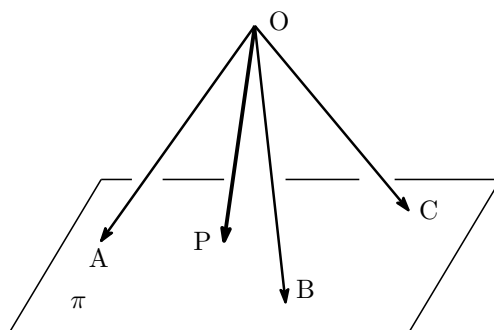


Figure 1.2: 4 点の共面

§ 1-2.

正規直交基底と座標空間

以上, §1.1 で得た『基底 vector』という概念によって, いわゆる座標空間 $[O; xyz]$ は容易に定義される.

1.2.1 右手系

これまでも空間座標を扱ったことはあると思うが, 3 本の座標軸の定め方には 2 通りあることを考えた経験があるだろうか. 長さ 1 の, 互いに直交しあう 3 つの vector を用意し, それを $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ としよう.

この 3 つの vector を, 始点を O にそろえるとき, これらの位置関係には次の 2 つの場合がある. Figure 1.3 (p. 4) を見られたい.

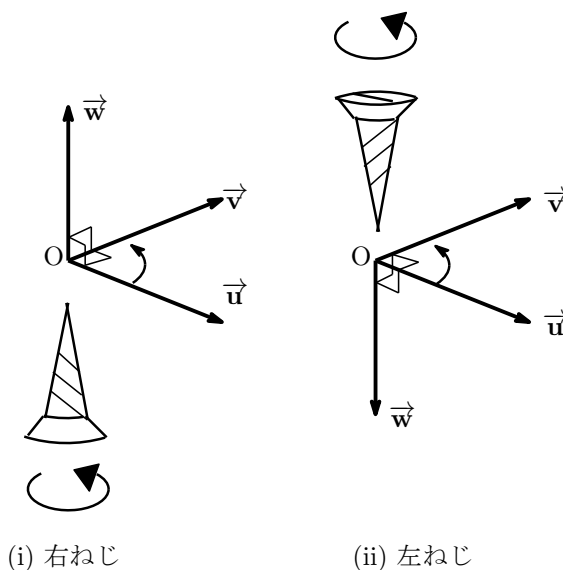


Figure 1.3: 右ねじと左ねじの進む方向

通常, ドアのノブは, 右ねじの進む方向に回すと, ドアが開くようになっている. 諸君が今読

んでいるこのページを真上から見下ろすとき、時計方向に回転するとページの表から裏面へと進むのが右ねじである。この方向を用いて、座標空間 $\mathbb{R}^3$ ，つまり $[O;xyz]$ を定義してみよう。

空間 E_3 に 1 点 O を定める。互いに垂直な、正規化された vector，つまり長さが 1 の vector $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ を考える。ただしここで、 $\vec{e}_x$ を $\vec{e}_y$ に重ねるように回転するとき、右ねじ、つまり右回転・時計回りに回すと先に進むようなねじ、の進む方向を、 $\vec{e}_z$ の方向と定める。

これは、Figure 1.4 (p. 5) のように、右手の人差し指を $\vec{e}_x$ に、中指を $\vec{e}_y$ に重ねたときに、親指の方向を $\vec{e}_z$ と定めるのと等しい。

1.2.2 右手系の正規直交基底

$\vec{e}_x$ を x 軸正方向の方向単位 vector， $\vec{e}_y$ を y 軸正方向の方向単位 vector，そして $\vec{e}_z$ を z 軸正方向の方向単位 vector として、座標系 $[O;xyz]$ を定めるとき、そのように定められた座標系を

右手系座標系 right-handed coordinate system

と言う。同様に、左手系の座標系を考えることもできるが、通常は右手系を用いる。

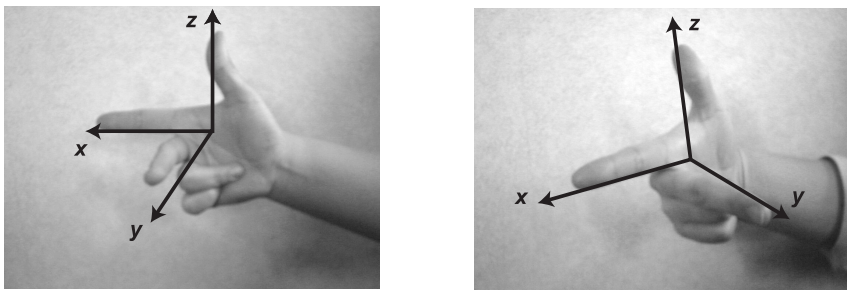


Figure 1.4: 右手系の座標系 $[O;xyz]$

$[O;xyz]$ が与えられた座標空間 $\mathbb{R}^3$ について、右手系で互いに垂直になっている 3 つの vector $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ は、この空間の基底 vector となる。そしてどれも正規化されている、つまり単位 vector であることから、この、vector $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ の 3 項列 $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ を

空間 $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底 orthonormal basis^{1,2}

という。

このように考えると、空間 $\mathbb{R}^3$ の点 $P(\vec{p})$ は、先ほどの Theorem 1.1 (p. 2) から、正規直交基底をなす $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ という 3 個の vector によって、その 1 次結合で表され、またその表し方は一意的であることが直ちに解る。

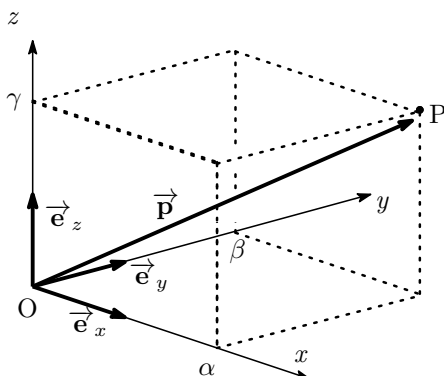
いま、

$$\vec{p} = \alpha \vec{e}_x + \beta \vec{e}_y + \gamma \vec{e}_z$$

と表されたとしよう。この表現を

$\vec{p}$ の基本 vector 表示

^{1,2}‘ortho’は「直角」を意味する語で、古典ギリシア語の「正しい」、「直立した」という意味の形容詞 *ὀρθός* からの派生語。続く ‘normal’ は、何度も出てきたように単位 vector 化されていることを意味する。それが『正規直交基底』というイカメシイ日本語になった。



と言う．このとき，点 P は座標 $P(\alpha, \beta, \gamma)$ をもつ．そこでこの $\vec{p}$ の成分，つまり各基本 vector の係数 α, β, γ を取り出して，列 vector を作る：

$$\overrightarrow{OP} = \vec{p} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}.$$

これを『 $\vec{p}$ の成分表示』と言う．

成分表示で正規直交基底を表せば

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる．

1.2.3 正射影としての成分と方向余弦

ところで，それぞれの成分は，点 P の位置 vector $\vec{p}$ の，直線としての x 軸， y 軸， z 軸への正射影であることを意識したことがあるだろうか．

高校数学では，正射影という言葉を書き定義しないために，様々な混乱が起こるが，我々はそれを克服している．つまり，正射影とは有向距離であり，従って実数である，という厳密な定義の下に議論を進めてきたからである．

例えば $\vec{p} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ の x 成分 α は，その直線，つまり x 軸の方向単位 vector $\vec{e}_x$ との内積として計算できたことを思い出そう：

$$\alpha = \vec{p} \cdot \vec{e}_x, \quad \beta = \vec{p} \cdot \vec{e}_y, \quad \gamma = \vec{p} \cdot \vec{e}_z$$

である．これ自体は，成分計算で考えれば，何一つ目新しいものではない．事実，例えば x 成分 α は

$$\vec{p} \cdot \vec{e}_x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 0 + \gamma \cdot 0 = \alpha$$

となって、あたりまえの話だ.

ところが、この図形的な意味を考えると、これまた高校数学で迫害されている vector の本質,

方向余弦, direction cosine

という、極めて重要な概念が見つかるのである.

まず、**方向余弦**の定義を挙げておこう:

Definition 1.3 (Vector の方向余弦)

Vector $\vec{\mathbf{p}} \in \mathbb{R}^3$ について,

$$\vec{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

であるとき,

$$\lambda = \frac{\alpha}{|\vec{\mathbf{p}}|}, \quad \mu = \frac{\beta}{|\vec{\mathbf{p}}|}, \quad \nu = \frac{\gamma}{|\vec{\mathbf{p}}|}$$

の 3 つの値からなる (順序) 3 項列 $\delta_{\mathbf{p}} = (\lambda, \mu, \nu)$ を

vector $\vec{\mathbf{p}}$ の方向余弦

と言う.

この定義から、直ちに次の系が導かれる. Figure 1.5 (p. 8) を見られたい.

Corrolary 1.4

$\vec{\mathbf{p}} = {}^T(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ の方向余弦を $\delta_{\mathbf{p}} = (\lambda, \mu, \nu)$ とする. λ, μ, ν をそれぞれ x -, y -, z -

成分とする vector $\vec{\mathbf{d}}_{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix}$ を考えれば, $\vec{\mathbf{d}}_{\mathbf{p}}$ は $\vec{\mathbf{p}}$ を正規化した単位 vector となる.

更に, $\vec{\mathbf{p}}$ が x -, y -, z - 軸正方向となす角をそれぞれ θ, φ, ψ とすれば, $\vec{\mathbf{p}}$ の方向余弦 (λ, μ, ν) の各成分それぞれについて,

$$\lambda = \cos \theta, \quad \mu = \cos \varphi, \quad \nu = \cos \psi$$

が成り立つ.

□

この方向余弦について、次の定理が成り立つ:

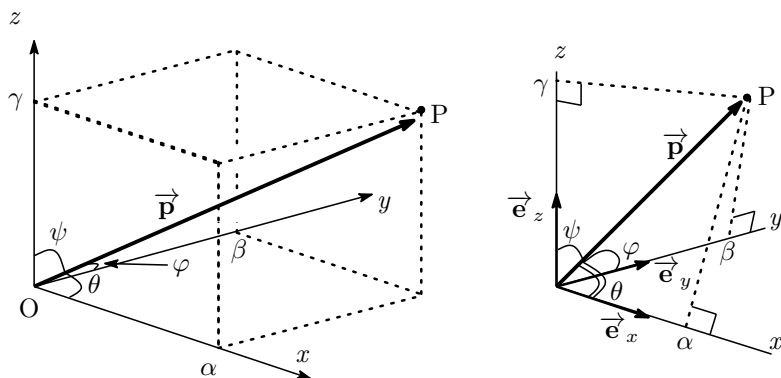


Figure 1.5: 軸とのなす角と方向余弦

THEOREM 1.5 (2 つの vector のなす角)

$\vec{p}$, $\vec{q}$ の方向余弦をそれぞれ $\delta_{\vec{p}} = (\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$, $\delta_{\vec{q}} = (\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$ とし, また $\vec{p}$ と $\vec{q}$ のなす角を ζ とする: $\zeta = \angle(\vec{p}, \vec{q})$. このとき,

$$\cos \zeta = \lambda_1 \lambda_2 + \mu_1 \mu_2 + \nu_1 \nu_2$$

である.

これは, $\vec{p}$, $\vec{q}$ の方向余弦 $\delta_{\vec{p}}$, $\delta_{\vec{q}}$ をそれぞれ正規化して, vector $\vec{d}_{\vec{p}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \mu_1 \\ \nu_1 \end{pmatrix}$,

$\vec{d}_{\vec{q}} = \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \mu_2 \\ \nu_2 \end{pmatrix}$ を作れば

$$\cos \zeta = \vec{d}_{\vec{p}} \cdot \vec{d}_{\vec{q}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \mu_1 \\ \nu_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \mu_2 \\ \nu_2 \end{pmatrix}$$

であることを意味する. つまり,

2 つの vector の交角 ζ の余弦は,
それらを正規化して得られる単位 vector の内積で求められる.

Proof.

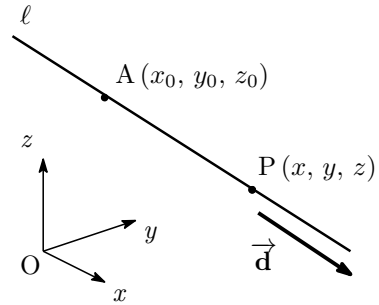
証明は諸君に委ねる. ■

§ 1-3.

 $\mathbb{R}^3$ における直線

先ほども述べたように、 $\mathbb{R}^3$ に関する解析幾何の本格的な展開は Lecture 7 に回すことにするが、直線の方程式だけはここでまとめておく。特に parameter 表示された直線の表現は、平面の場合のそれと本質的に何も変わらないからである。

$\mathcal{V}_3 = \mathbb{R}^3$ の定点 $A(x_0, y_0, z_0)$ を通り、方向 vector $\vec{d} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ をもつ直線 ℓ 上に、動点 $P(x, y, z)$ をとれば、ある適当な $t \in \mathbb{R}$ について

Figure 1.6: $\mathbb{R}^3$ における直線

$$\vec{OP} = \vec{OA} + t\vec{d} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \iff \ell : \begin{cases} x = x_0 + ta, \\ y = y_0 + tb, \\ z = z_0 + tc \end{cases}$$

となる。この最後の式を

直線 ℓ の parameter 表示

と言う。

$abc \neq 0$ であれば、この式から t を消去することができて、 ℓ の方程式は

$$\ell : \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

になる。

もし a, b, c の内に 0 であるものがあっても、それは高々 2 つである。なぜなら、 a, b, c がすべて 0 であつたら、 ℓ の方向 vector が zero vector となり、直線が存在しないことになるから。

例えば、 $a \neq 0, b \neq 0, c = 0$ の場合には、 ℓ の parameter 表示と方程式は

$$\ell : \begin{cases} x = x_0 + ta, \\ y = y_0 + tb, \\ z = z_0 \end{cases} \iff \ell : \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}, z = z_0$$

となる。この直線は、平面 $z = z_0$ 上にある。

更に $b = 0$ で a のみが 0 でない場合は、 ℓ は

$$\ell : \begin{cases} x = x_0 + ta, \\ y = y_0, \\ z = z_0 \end{cases} \iff \ell : y = y_0, z = z_0, x \text{ は任意の実数}$$

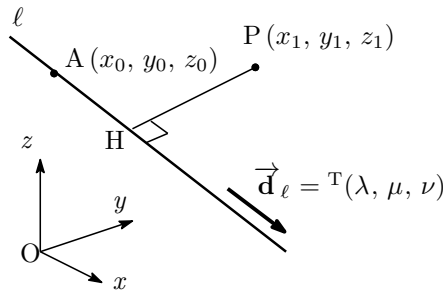
ということになり、これは 2 平面 $y = y_0, z = z_0$ の交線を表す。

次の定理は一切覚える必要はない。このようなムゴタラシイ式まで『重要公式だ! 覚えろ!!』と言われたら、数学などやってられない。しかし、これが導かれる過程は極めて重要である。

THEOREM 1.6 ($\mathbb{R}^3$ における点と直線との距離)

点 $A(x_0, y_0, z_0)$ を通り, 方向余弦が (λ, μ, ν) である直線を ℓ とする. 点 $P(x_1, y_1, z_1)$ と直線 ℓ との距離 $\text{dist}(P, \ell)$ は次式で与えられる:

$$\begin{aligned} \text{dist}(P, \ell) \\ = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2 - \{\lambda(x_1 - x_0) + \mu(y_1 - y_0) + \nu(z_1 - z_0)\}^2}. \end{aligned}$$

Figure 1.7: 点と直線の距離 $\text{dist}(P, \ell)$

Proof.

もちろん, 諸君に期待する.

しかし, 根号の中をじっと見れば, 最初の 3 項は何かの長さの 2 乗で, 中カッコの中身はナイセ... だから, 正●影であることは直ちに解る. ということは結局▲平方の定理... ■

§ 1-4.**Vector の外積**

それでは, この Lecture 最後の thema, vector に関する新たな演算である『外積』というのを定義しよう^{1.3}.

2つの vector $\vec{a}, \vec{b} \in \mathcal{V}_3$ が与えられたとする. $\vec{a}$ を $\vec{b}$ に重ねるように回転させるとき, その回転によって右ねじが進む方向をもつ単位 vector を $\vec{u}$ とする. これは $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を右手系で解釈する, ということに他ならない. つまり, 右手の人差し指を $\vec{a}$ に, 中指を $\vec{b}$ に重ねたとき, 親指の向いている方向の単位 vector として $\vec{u}$ をとる, ということである. もう一度, Figure 1.3 (p. 4) 及び Figure 1.4 (p. 5) を見て欲しい.

さて, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を隣り合う 2 辺とする平行 4 辺形を作り, その面積を $S(\vec{a}, \vec{b})$ で表す. この値は常に非負である: $S(\vec{a}, \vec{b}) \geq 0$.

これで, 2つの vector $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の外積を定義する準備が整った:

Definition 1.7 (Vector の外積)

$\mathcal{V}_3 = \mathbb{R}^3$ の 1 次独立な 2 つの vector $\vec{a}$ と $\vec{b}$ について, $(\vec{a}, \vec{b})$ で右手系を作るとき,

^{1.3}色々な名前があつてとまどうかもしれないが, vector product という名前が本質的である. 内積はその結果がスカラーであるから, scalar product と呼ばれる. それに対して, 外積は演算結果が vector になる. それ故に『vector 積』と呼ばれるわけである.

そのいずれにも垂直な方向の単位 vector を $\vec{u}$ とする. また, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を隣り合う 2 辺とする平行 4 辺形の面積を $S = S(\vec{a}, \vec{b})$ とする.

このとき, $\vec{a}$, $\vec{b}$ のいずれにも垂直な vector

$$S\vec{u} = S(\vec{a}, \vec{b})\vec{u}$$

を

2 つの vector $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の外積, クロス積, vector 積
outer product, cross product, vector product

と呼び, $\vec{a} \times \vec{b}$ と表す:

$$\vec{a} \times \vec{b} \stackrel{\text{def}}{=} S(\vec{a}, \vec{b})\vec{u}.$$

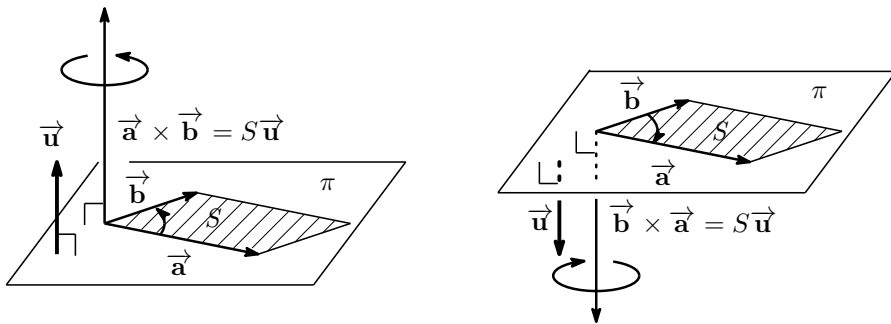


Figure 1.8: Vector の外積

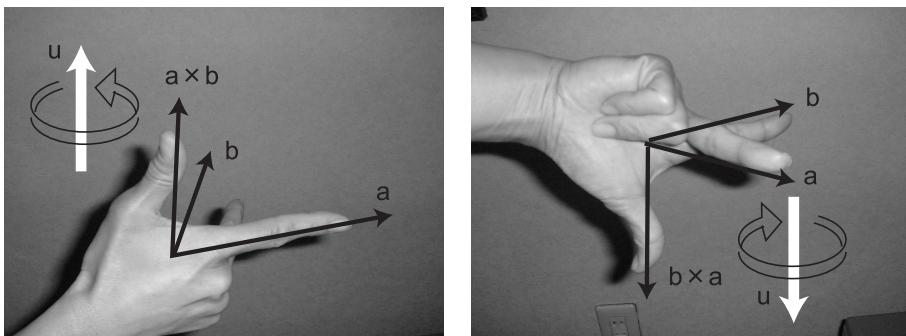


Figure 1.9: $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$

定義から解るように, 外積は可換性をもたない. つまり,

$$\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}, \quad \vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$$

である. Figure 1.8 (p. 11) と Figure 1.9 (p. 11) を見て欲しい. どちらも左側の図が $\vec{a} \times \vec{b}$ を, 右側が $\vec{b} \times \vec{a}$ を表す. 常に, 外積を表す記号 '×' の前に書かれた vector を, '×' の後ろに書か

れた vector に重ねるように回転するとき、右ねじがどちらに進むか？を考えれば、外積として得られる vector の方向が定まる。

それは、‘×’の前に書かれた vector を右手の人差し指に、‘×’の後ろに書かれた vector を中指に、重ねるとき、親指の向かう方向である。これが『座標系として右手系を採用する』ということの意味なのである。

自分の右手で試してみよ。ただし、けっこうシンドイ。柔軟体操を忘れずに。

このように、交換法則 $x \circ y = y \circ x$ をみたさない演算を、『非可換な演算 **noncommutative operation**』と呼ぶ。外積は、おそらく諸君が最初に目にした非可換な演算であろう。

外積について、次の定理が基本的である。

THEOREM 1.8 (外積の成分表示)

$\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ がそれぞれ

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

であるとき、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の外積 $\vec{a} \times \vec{b}$ を成分で表すと

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

となる。

Proof.

Who should prove it? ■

一般に 行列 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について値 $ad - bc$ を

行列 $\mathbf{A}$ の行列式 **determinant**

と言い、

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

と表す。

行列式を用いて外積を表せば

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = {}^T \left(\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

と表される。

外積について、その性質をまとめておこう：

THEOREM 1.9 (外積の性質)

(i) $\forall \vec{a} \in \mathbb{R}^3; \vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$.

- (ii) $\forall \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3; \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}.$
- (iii) $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3; \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}.$
- (iv) $\forall \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3, \forall t \in \mathbb{R}; (t\vec{a}) \times \vec{b} = t(\vec{a} \times \vec{b}).$
- (v) $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3; \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}).$
- (vi) $\vec{a}, \vec{b}$ が線形従属ならば, $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$. この逆も成り立つ.
- (vii) $\pi(\vec{a}, \vec{b})$ で $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の張る平行 4 辺形を表し, その面積を $S(\vec{a}, \vec{b})$ とすれば,

$$S(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a} \times \vec{b}|.$$

(viii) 以上から, 次のように言える

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が線形独立であれば, その外積 $\vec{a} \times \vec{b}$ は, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の張る平面に垂直で, かつ大きさが $S(\vec{a}, \vec{b})$ であるような vector になる.

- (ix) $\vec{a}, \vec{b}$ が線形独立とする. $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の張る平面を π とし, π 上に $\vec{c}$ の基点をとるとき, $\vec{c}$ の端点 C と π との距離は

$$\text{dist}(\pi, C) = \frac{|\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})|}{|\vec{a} \times \vec{b}|}$$

で求められる. 従って, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ のなす平行 6 面体の体積 V は

$$V = |\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})|$$

である.

Lecture 2

$\mathbb{P}^3$ における平面

§ 2-1.

外積を再び

Lecture 6 において、空間における 2 つの vector の間の演算として、『vector の外積』を導入した。この Lecture では、別の観点からこの外積を再定義する。多少触れたように、以下の形で導入する方が応用性も大きくなり、問題を解く上でもオイシイところが多い。

まず、『斉次多項式』homogeneous polynomial という概念を確認しておこう。一般に、 n 個の変数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ についての多項式

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

の項が、すべて同じ次数をもつとき、その多項式を**斉次多項式**という。例えば

$$f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 5yz + 6zx$$

は、3 変数の斉次 2 次式であり、

$$g(x, y, z, w) = x - 2y + 3z - 4w$$

は、4 変数の斉次 1 次式である。

ある n 変数の多項式 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ が斉次式であるとき、それを 0 と置いてできる方程式を『**斉次方程式 homogeneous equation**』という。

そして、いくつか (次の例では k 個) の斉次 1 次方程式を連立してできる連立方程式

$$\begin{cases} a_1x_1 + b_1x_2 + \dots + c_1x_n = 0, \\ a_2x_1 + b_2x_2 + \dots + c_2x_n = 0, \\ \dots\dots\dots \\ a_kx_1 + b_kx_2 + \dots + c_kx_n = 0, \end{cases}$$

を『**斉次 1 次連立方程式 homogeneous system of linear equations**』と呼ぶ。

これ以降、vector には必ずしも「矢線」は付いていないことに注意して欲しい。つまり、“ $\rightarrow$ ” を省略して、ボールドローマン体 $\mathbf{a}$ で $\vec{\mathbf{a}}$ を表すことがある。

行列と vector の積について既に学んだ諸君には、この連立方程式は

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & \dots & c_1 \\ a_2 & b_2 & \dots & c_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_k & b_k & \dots & c_k \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\in \mathbb{R}^n)$$

とすれば

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

と表せることが解るであろう。

変数の個数を、以下では 3 個として、 $\mathbb{R}^3$ で考えよう。3 変数 x, y, z に関する 2 つの斉次 1 次方程式からなる斉次連立方程式

$$\begin{cases} a_1x + a_2y + a_3z = 0, \\ b_1x + b_2y + b_3z = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

は、 $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすれば、vector の内積によってそれぞれ

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = 0, \quad \mathbf{b} \cdot \mathbf{x} = 0$$

と表されるから、 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$ と定めれば

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad \text{つまり} \quad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

となる。

この方程式を解けば、解の 1 つとして

$$x = a_2b_3 - a_3b_2, \quad y = a_3b_1 - a_1b_3, \quad z = a_1b_2 - a_2b_1$$

を得ることは直ちに了解される。『解の 1 つ』と言ったのは、解はこれだけではないからで、3 変数の斉次 1 次方程式が 2 つの場合、解はただ 1 つの定まるのではなく、 x, y, z の比が定まるだけであるからである。

我々は vector を軸としてすべてを再構成してきた。その観点からして、連立方程式 (2.1) の解 (x, y, z) は行列を用いて表した (2.2) の vector $\mathbf{x}$ である。その意味で、この vector $\mathbf{x}$ を

連立方程式 (2.1)、行列表現 (2.2) の解 vector (solution vector)

と呼ぶことにしよう。この言い方を認めれば、連立方程式 (2.1) のすべての解は

$$\mathbf{x} = k \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}, \quad \text{ただし } k \in \mathbb{R}$$

で与えられることになる。

特にこの k の値を $k = 1$ と定めたときの $\mathbf{x}$ 、つまり、次の $\mathbf{x}_1$ ；

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

を、改めて $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の外積と定義しよう：

Definition 2.1 (vector の外積の再定義)

3 次元 vector 空間 $\mathcal{V}_3$ における 2 つの vector

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

について, $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の外積 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ を

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

と定義する. これは, 連立方程式 (2.1), つまり

$$\begin{cases} a_1 x + a_2 y + a_3 z = 0, \\ b_1 x + b_2 y + b_3 z = 0 \end{cases}$$

の 1 つの解である. この解 vector は, 行列式を用いれば

$$\begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = {}^T \left(\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

と表される.

さて, この $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ が, 連立方程式 (2.1) の 1 つの解として得られたこと, そしてこの連立方程式が, 実は

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0, \quad \mathbf{b} \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

であったことを思い出せば, 我々は直ちに次の定理を得る:

THEOREM 2.2 (外積の性質)

$\mathbf{a}, \mathbf{b}$ が 1 次独立であれば, その外積 $\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}$ は $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ のいずれにも垂直な vector である. つまり

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{b}.$$

またその大きさ $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ は, $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ が $\mathbb{R}^3$ 内に張る平行 4 辺形の面積 $S(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ に等しい. つまり

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = S(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

$\mathbf{u}$ を右手系における $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ の方向単位 vector とすると, Figure 2.1 (p. 18) のようになる. 従って, 与えられた 2 つの vector のいずれにも垂直な vector を得るためには, その 2 つの vector の外積を求めてやれば, その scalar 倍はすべて与えられた 2 つの vector に垂直な vector である. また, 空間内で 2 つの vector の作る平行 4 辺形の面積が欲しいときは, 外積を求めてその絶対値を

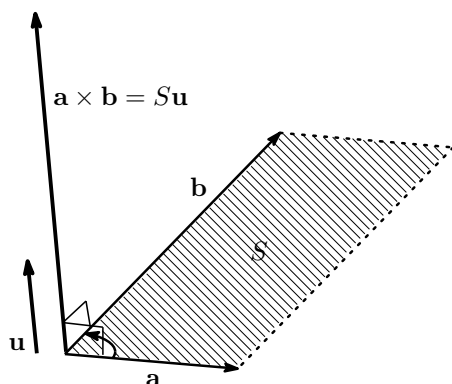


Figure 2.1: 外積とその絶対値

とれば終わりである．悪用が楽しみではないか！

Lecture 1 の最後に挙げた外積の性質が，定義 Definition 2.1 から直ちに証明される．重複になるが，もう 1 度列举しておこう．

THEOREM 2.3 (外積の性質 (2))

$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ とする．次は直接計算により明らかである：

1°. $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$.

2°. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$.

3°. $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$.

4°. t を scalar (実数) とするとき， $(t\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = t(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$.

5°. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$.

Proof.

5° をそのまま力づくで確かめようとするとかかなりの手間がかかる．ここで、『巡回置換 cyclic permutation』という考え方を導入する．

3 個のもの (実際には個数はいくつでも良い) A, B, C がこの順に並んでいるとき， A を B に， B を C に， C を A に置き換えることを， $\begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix}$ または単に $(A B C)$ で表し，これを巡回置換と言う．

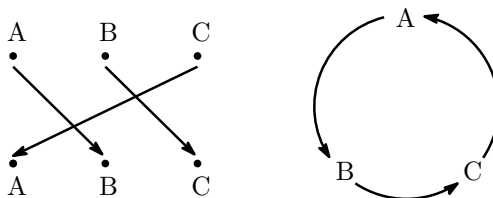


Figure 2.2: 3 個のものの巡回置換

この巡回置換を “ $\stackrel{\text{cp}}{\mapsto}$ ” で表すとき、順列 $[ABC]$ について

$$[ABC] \stackrel{\text{cp}}{\mapsto} [BCA] \stackrel{\text{cp}}{\mapsto} [CAB] \stackrel{\text{cp}}{\mapsto} [ABC] \stackrel{\text{cp}}{\mapsto} \dots\dots$$

となる.

さて、示すべき式は

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

であるが、この式の中央辺は最左辺 $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ に巡回置換 $\text{cp} = (abc)$ を施した $\mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a})$ であり、また最右辺は中央辺に同じ巡回置換を施した $\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ である：

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \stackrel{\text{cp}}{\mapsto} \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \stackrel{\text{cp}}{\mapsto} \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}).$$

ここで、示すべき式の最左辺を計算すると

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_2c_3 - b_3c_2 \\ b_3c_1 - b_1c_3 \\ b_1c_2 - b_2c_1 \end{pmatrix} \\ &= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \\ &= \underbrace{(a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2)}_{\alpha} - \underbrace{(a_1b_3c_2 + a_2b_1c_3 + a_3b_2c_1)}_{\beta} \quad (\natural) \end{aligned}$$

となる. $(\natural)$ の第 1 項を α 、第 2 項を β とする. α について巡回置換 $\text{cp} = (abc)$ によって

$$a_1b_2c_3 \stackrel{\text{cp}}{\mapsto} a_3b_1c_2 \stackrel{\text{cp}}{\mapsto} a_2b_3c_1 \stackrel{\text{cp}}{\mapsto} a_1b_2c_3$$

であるから、項の順序が変わるだけで α は全体として不変であり、 β についても巡回置換 $\text{cp} = (abc)$ によって

$$a_1b_3c_2 \stackrel{\text{cp}}{\mapsto} a_2b_1c_3 \stackrel{\text{cp}}{\mapsto} a_3b_2c_1 \stackrel{\text{cp}}{\mapsto} a_1b_3c_2$$

となるから同様に不変. 従って、結局のところ式 $(\natural)$ は巡回置換 (abc) の下で不変である.

以上より、示すべき式 5° の中央辺も最右辺も、 $(\natural)$ と同じ値をもつ. これが示されるべきことであった. ■

このような、1 つの vector $\mathbf{a}$ と、2 つの vector $\mathbf{b}, \mathbf{c}$ の外積との内積、つまり $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ のことを

scalar 3 重積 triple scalar product

と言う. 積が scalar 量 (我々の場合には実数) となることから、こう呼ばれる. グラスマン (Herman Günther Grassmann, 1809-77)^{2.1} というドイツの数学者は、この scalar 3 重積 $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ を $[\mathbf{abc}]$ という記号で表した. この記号を使えば、上で示したのは

$$[\mathbf{abc}] = [\mathbf{bca}] = [\mathbf{cab}]$$

という恒等式である. この scalar 3 重積の幾何学的意味を考察したのが、次の Theorem 2.4 (p. 20) である. この定理は、幾何学的 imagination がモノを言う. そこで、再び矢線 vector を復活させる.

^{2.1} グラスマンの業績は代数、幾何、解析と多岐に渡るが、数学への最大の貢献は『線形代数学』の創始であろう. 線形代数学とは、まさに諸君が今学んでいる、vector や行列に関する理論である. 彼に感謝すべきであろう.

線形代数学に関する著書『広延論』(Die Ausdehnungslehre) は、ここで我々が考察している vector の外積をより抽象的な形で定義しており、外積代数、グラスマン代数とも言われる.

53 歳のとき数学をやめ、以後サンスクリット語 (印欧語 Indo-european language の古典語. 仏教の仏典はサンスクリット語で書かれた.) の研究にうちこみ、言語学上の業績を多くあげた. (上記は DVD-ROM 版『平凡社大百科事典』©Hitachi Digital Heibonsha (1998) の永田 雅宜 氏の記事を参考にした.)

THEOREM 2.4 (平面と点との距離, vector 三重積)

$\vec{a}, \vec{b}$ は線形独立であるとする. $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の張る平面を π とし, π 上に $\vec{c}$ の基点をとるとき, $\vec{c}$ の終点 C と π との距離は

$$\text{dist}(\pi, C) = \frac{|\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})|}{|\vec{a} \times \vec{b}|}$$

で求められる. 従って, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ のなす平行 6 面体の体積 V は

$$V = |\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})|$$

である. 図は Figure 2.3 (p. 20) を見られたい.

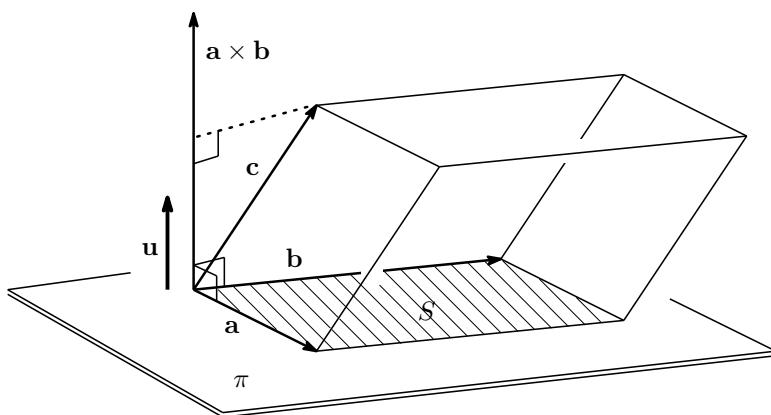


Figure 2.3: Scalar 3 重積の意味

Proof.

悪用が楽しみである. しかし, そのためには証明が不可欠である. Task での諸君の奮闘に期待する. ■

§ 2-2.

E_3 における平面と直線の垂直

3 次元 vector 空間 $\mathcal{V}_3$ に座標系 $[O; xyz]$ が与えられ, $\mathbb{R}^3$ が定義されているとしよう. Lecture 1 では, この空間にある直線の parameter 表示と方程式を考えた.

ここでは, 空間 $\mathbb{R}^3$ 内の平面 π が $[O; xyz]$ でどのように表現されるかを考察するために, 平面と直線の直交関係をいくらか初等的に考えることにしよう.

2.2.1 空間幾何の基礎

まず重要なのは, 平面の決定条件である. 何が決まれば, 3 次元空間 $\mathcal{V}_3$ で平面が一意的に決定するだろうか.

一般に Euclid 空間 E_3 に関して、次を認めることにする^{2.2}：

- I. 異なる 2 点 A, B を通る直線が常に存在し、かつそれはただ 1 つに限る.
- II. 1 直線上にない 3 点 A, B, C を通る平面が常に存在し、かつそれはただ 1 つに限る.
- III. 平面 π 上にある 2 点 A, B を通る直線 ℓ 上の点は、すべて平面 π 上にある.

この公理を認めれば、平面の決定条件として次の 4 つの場合があることが解るであろう：

Proposition 2.5

空間 E_3 で平面が決定するのは、次の場合である：

- 1°. 1 直線上にない 3 点が与えられたとき.
- 2°. 1 直線とその上にない 1 点が与えられたとき.
- 3°. 交わる 2 直線が与えられたとき.
- 4°. 平行な 2 直線が与えられたとき.

□

2.2.2 直線と平面の垂直

平面 π と直線 ℓ が垂直であることを次のように定義する：

Definition 2.6 (平面と直線の垂直)

平面 π と直線 ℓ が点 P で交わるとき、 π に含まれる任意の直線に ℓ が垂直ならば、直線 ℓ と平面 π は垂直であると定め、これを

$$\ell \perp \pi$$

と表す.

この定義に従えば、ある平面と直線の直交を調べるためには、その平面に含まれるすべての直線との直交関係を調べなければならないことになるが、実は次の定理が成り立つ. Vector 幾何の強みはここにあると言っても良い：

^{2.2}これは、Euclid 空間の公理 (Axiom) である. つまり、我々はこれを認めた上で、空間幾何を構成する. こういう数学の進め方を『公理的方法 axiomatic method』と言うが、ギリシアの数学者 Euclid の仕事は、新しい定理を発見したことよりも、『幾何学原論 (Elements of Geometry)』において、当時の幾何学を公理的方法の下にまとめたことにある. 事実として、『幾何学原論』の中で証明される定理のうち、どれが彼の発見であり、どれが既に見つかっていたものか、は不明である. 更にひどいことには、Euclid という人物が実在したことさえ疑う歴史家もいる.

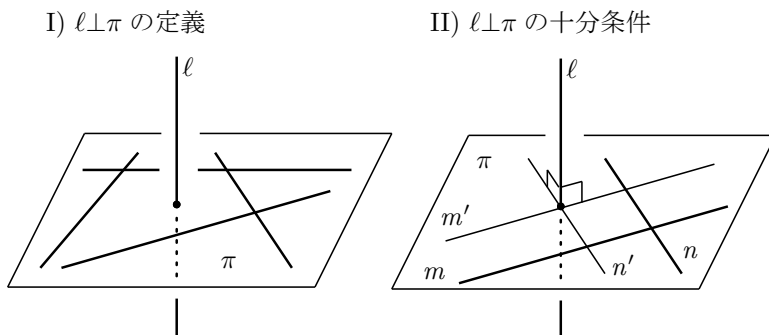


Figure 2.4: 平面と直線の垂直

THEOREM 2.7 (平面と直線の直交条件)

平面 π と直線 ℓ が垂直である (直交する) のは, ℓ が, π に含まれる平行でない 2 直線と垂直なときである.

m, n を π に含まれる平行でない 2 直線とすると,

$$\ell \perp m \text{ かつ } \ell \perp n \implies \ell \perp \pi.$$

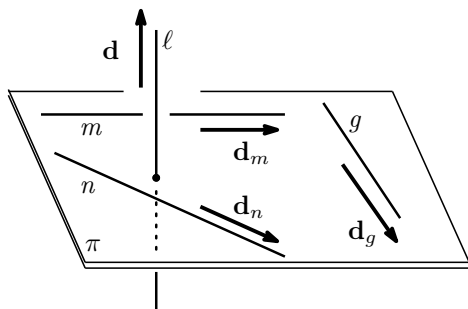


Figure 2.5: Theorem 2.7

Proof.

図は Figure 2.5 (p. 22) を見られたい.

ℓ の方向 vector を $\mathbf{d}$ とし, また平面 π に含まれる 2 直線 m, n の方向 vector をそれぞれ $\mathbf{d}_m, \mathbf{d}_n$ とする. このとき, m と n が平行でないことから, $\mathbf{d}_m$ と $\mathbf{d}_n$ は 1 次独立であり, 従って平面 π 上の任意の直線 g の方向 vector $\mathbf{d}_g$ は, $\mathbf{d}_m$ と $\mathbf{d}_n$ の 1 次結合で表される. それを $\mathbf{d}_g = \alpha \mathbf{d}_m + \beta \mathbf{d}_n$ とする.

仮定より $\ell \perp m, \ell \perp n$ であるから $\mathbf{d} \cdot \mathbf{d}_m = 0, \mathbf{d} \cdot \mathbf{d}_n = 0$ が成り立ち, 従って

$$\mathbf{d} \cdot \mathbf{d}_g = \mathbf{d} \cdot (\alpha \mathbf{d}_m + \beta \mathbf{d}_n) = \alpha \mathbf{d} \cdot \mathbf{d}_m + \beta \mathbf{d} \cdot \mathbf{d}_n = 0.$$

従って, $\mathbf{d} \perp \mathbf{d}_g$ が成り立つ. これが, 平面 π に含まれる任意の直線 g について成り立つから, ℓ は平面 π に含まれる任意の直線と垂直である. よって平面と直線の垂直の定義 Definition 2.6 をみだし, 定理が示された. ■

2.2.3 3 垂線の定理

空間 E_3 に、平面 π とその上にない 1 点 P が与えられたとき、点 P から平面 π に常に垂線が下せること、つまり

任意の平面に、任意の点から下した垂線が存在する

ことは、証明されねばならない。我々は、空間における垂線の下し方を、未だ知らないのだ。

これについて答える次の定理、**垂線の存在定理**がある。これは **3 垂線の定理**とも言われる：

THEOREM 2.8 (垂線の存在定理)

平面 π とその上にない点 P が与えられたとき、点 P から平面 π に下した垂線が常に存在する。

その垂線は、次のようにして平面上の作図方法のみを用いて作図可能である：

- 1°. P から平面 π 上の直線 ℓ に垂線を下し、その足を Q とする。
- 2°. π 上で、点 Q で直線 ℓ に垂線 m を立てる。
- 3°. 直線 PQ と m の定める平面上で、点 P から直線 m に垂線 g を下す。

このとき、直線 g は平面 π に垂直である。

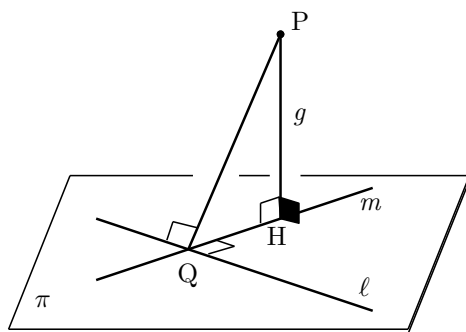


Figure 2.6: Theorem 2.8

Proof.

Figure 2.6 (p. 23) を見よ. 詳しい証明は省くが, 作図のために作られた 1° から 3° における垂線は, すべて平面上での垂線の作図であることに注意して欲しい. 順に

- 1°. 点 P と直線 l で定まる平面,
- 2°. 与えられた平面 π ,
- 3°. 交わる 2 直線 PQ , m の定める平面

である. Figure 2.6 (p. 23) では, 塗りつぶした直角の印が示されるべき垂線の存在を表し, 塗りつぶしていないそれは, 平面上での垂直を表す. ■

この垂線の存在定理 Theorem 2.7 (p. 22) の系として, 次が成り立つ. これも『3 垂線の定理』と呼ばれることがある. ただし, この系は平面と直線の垂直について述べるものではない. 平面と直線の垂直が仮定された上で, 直線同士の直交を示すものである. 注意して欲しい.

Corrolary 2.9 (3 垂線の定理 (2))

平面 π と, その上にない点 P が与えられたとする. P から π に垂線を下し, その足を H とする. 平面 π 上に, H を通らない直線 g があるとき,

- 1°. 点 P から g に下した垂線の足を K とすると, $HK \perp g$ が成り立つ.
- 2°. 点 H から g に下した垂線の足を K とすると, $PK \perp g$ が成り立つ.

□

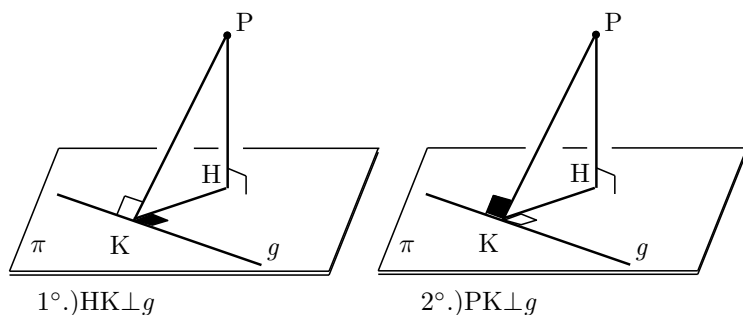


Figure 2.7: 3 垂線の定理 (2)

Proof.

これも, 平面と直線の垂直の定義から明らかであろう. Figure 2.7 (p. 24) では, 結論として示されるべき垂直は, 塗りつぶした直角の印をつけておいた. 仮定された垂直が, 直線と平面の垂直で, 結論として得られる垂直は直線同士のそれであることを銘記しておいて欲しい. ■

§ 2-3.

 $\mathcal{V}_3$ における平面の表現

以上で、空間 E_3 における平面と直線の位置関係のうち、最も重要な垂直関係を初等幾何的な観点から整理した。

以下では、 E_3 を $\mathbb{R}^3$ として把握して、それに含まれる平面を vector を軸に据えて解析的に考察する。

2.3.1 平面の parameter 表示

空間 $\mathbb{R}^3$ に、共線でない 3 点 $P_0(\mathbf{p}_0)$, $P_1(\mathbf{p}_1)$, $P_2(\mathbf{p}_2)$ があるとき、平面の決定条件から、3 点 P_0, P_1, P_2 を含む平面 $\pi = \pi(P_0P_1P_2)$ が決定する。

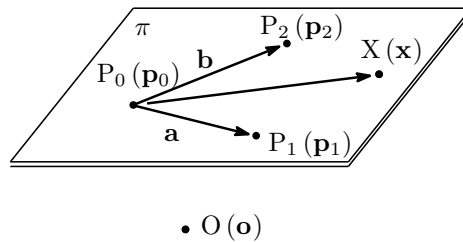


Figure 2.8: 平面の parameter 表示

この平面上に点 X をとり、その位置 vector を $\mathbf{x}$ と定めれば、平面 π 上での $\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}$ の 1 次独立性により、適当な $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ が存在して

$$\overrightarrow{P_0X} = \alpha \overrightarrow{P_0P_1} + \beta \overrightarrow{P_0P_2}$$

が成り立つ。 $\overrightarrow{P_0P_1} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{P_0P_2} = \mathbf{b}$ と定めれば、この式は

$$\mathbf{x} - \mathbf{p}_0 = \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} \iff \mathbf{x} = \mathbf{p}_0 + \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}) \quad (2.4)$$

となる。この式 (2.4) を、

平面 $\pi = \pi(P_0P_1P_2)$ の parameter 表示

と言う。

これを成分で表してみよう。 $X(x, y, z)$ とし、また $i = 1, 2, 3$ について $P_i(x_i, y_i, z_i)$ とすれば、parameter 表示 (2.4) は次の

3 点を通る平面の成分表示

になる：

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha(x_1 - x_0) + \beta(x_2 - x_0), \\ y = y_0 + \alpha(y_1 - y_0) + \beta(y_2 - y_0), \\ z = z_0 + \alpha(z_1 - z_0) + \beta(z_2 - z_0). \end{cases} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

2.3.2 平面の法線 vector

平面 π に垂直な vector を、平面における直線のそれと同様に

平面 π の法線 vector (normal vector)

と言う。この法線 vector によって、空間内の平面は、極めて簡潔な表現をもつ。

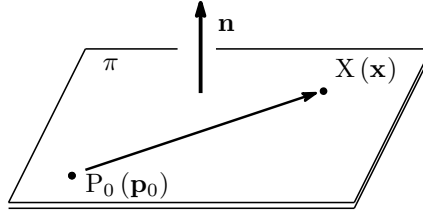


Figure 2.9: 平面の方程式の一般形

点 $P_0(\mathbf{p}_0)$ を通り、法線 vector $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ をもつ平面を π とする。平面 π 上に点 $X(\mathbf{x})$ をとれば、点 X が P_0 に一致しないならば

$$\overrightarrow{P_0X} \perp \mathbf{n} \iff \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_0X} = 0$$

が成り立つ。 X が P_0 と一致する場合には $\overrightarrow{P_0X} = \mathbf{o}$ となるから、このときも内積 $\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_0X}$ の値は 0 となり、この式は成り立つ。ここで $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $X(x, y, z)$ とすれば、

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{P_0X} = \mathbf{x} - \mathbf{p}_0 = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix}$$

であるから、

$$\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_0X} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = 0 \iff ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0) = 0 \quad (2.5)$$

を得る。式 (2.5) の定数項 $-(ax_0 + by_0 + cz_0)$ の値を d と置けば、この平面は

$$ax + by + cz + d = 0 \quad (2.6)$$

で表されることになる。この式 (2.6) を、

平面 π の一般形

と呼ぶ。これが、平面 π の方程式である。

以上の導出は決して難解なものではないが、その中で、既を示した重要な性質が使われていることに気がついているだろうか。それは、Theorem 2.7 (p. 22) で示した平面と直線の垂直関係である。

平面 π と垂直な法線 vector は、平面 π に含まれる任意の直線と、従って π に含まれる任意の vector $\overrightarrow{P_0X}$ と、垂直である。動点 X が π 上のどこにあっても、

$$\mathbf{n} \perp \overrightarrow{P_0X} \iff \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_0X} = 0$$

が成り立つことが、この方程式の立脚する根拠である．銘記して欲しい．

法線 vector $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ について，すべての成分が 0 であることはないから，比 $a : b : c$ が定まる．この比 $a : b : c$ を

平面 π の方向比 direction ratio

と言う．

以上から，我々は次の定理を得たことになる：

THEOREM 2.10 (平面の方程式)

空間 $\mathbb{R}^3$ の，法線 vector $\mathbf{n} = {}^T(a, b, c)$ をもつ平面は， x, y, z の 1 次方程式

$$\pi : ax + by + cz + d = 0 \quad (a^2 + b^2 + c^2 \neq 0)$$

で表される．この平面 π は方向比 $a : b : c$ をもつ．

2.3.3 平面の標準形

平面上の直線に『標準形』と呼ばれる特別な形の方程式があったように，空間における平面にも，俗称

ヘッセの標準形 Hessian Normal Form

がある．

π を， $\mathcal{V}_3$ 内の原点 O を通らない平面とし，その法線 vector を $\mathbf{n}$ とする． $[O;xyz]$ の原点 O から π に垂線を下し，その足を H とする．

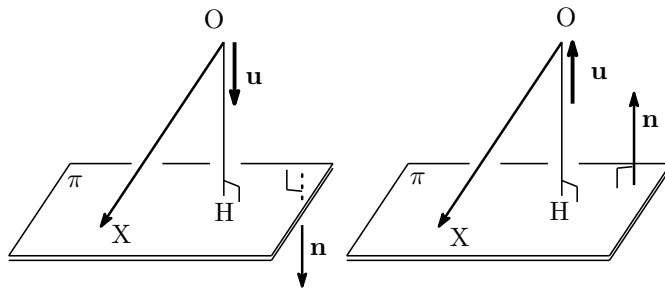


Figure 2.10: 平面の標準形

$\mathbf{n}$ の向かう方向を正として，有向距離 $\overline{OH} = r$ とすれば，常に $\overline{OH}$ と $\mathbf{n}$ は平行であるが，

- $\mathbf{n}$ と $\overline{OH}$ が同じ方向に平行ならば $r > 0$ ，
- $\mathbf{n}$ と $\overline{OH}$ が逆の方向に平行ならば $r < 0$

である．平面 π 上に動点 $X(\mathbf{x})$ をとれば， $\overline{OH}$ は $\overrightarrow{OX}$ の $\mathbf{n}$ への正射影 $\text{pr}_{\mathbf{n}}(\overrightarrow{OX})$ であるから， $\mathbf{n}$ を正規化 (単位 vector 化) して $\mathbf{u}$ を作れば

$$r = \overline{OH} = \text{pr}_{\mathbf{n}}(\overrightarrow{OX}) = \mathbf{u} \cdot \overrightarrow{OX}$$

で求められる。この式を成分を使って表してみよう。

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, X(x, y, z) \text{ とすると, } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ であり, また}$$

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

であるから,

$$r = \mathbf{u} \cdot \overrightarrow{OX} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} (ax + by + cz) \quad (2.7)$$

となる。

(2.7) で,

$$\lambda = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \quad \mu = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \quad \nu = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

と置けば, (2.7) は次の (2.8) となる :

$$\lambda x + \mu y + \nu z = r, \quad \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1. \quad (2.8)$$

一般に, $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ をみたす l, m, n によって, 平面 π を

$$lx + my + nz = r$$

の形に表した式を

平面 π の標準形 normal form

と言う。直線の場合と同じである。ここで, r は有向距離であって,

- π の法線 vector $\mathbf{n}$ と $\overrightarrow{OX}$ のなす角が鋭角ならば $r = \text{pr}_{\mathbf{n}}(\overrightarrow{OX}) > 0$ であり,
- π の法線 vector $\mathbf{n}$ と $\overrightarrow{OX}$ のなす角が鈍角ならば $r = \text{pr}_{\mathbf{n}}(\overrightarrow{OX}) < 0$ である。

いずれにしても, 原点 O から平面 π までの距離 $\text{dist}(O, \pi)$ は

$$|r| = |\mathbf{u} \cdot \overrightarrow{OX}| = \frac{|ax + by + cz|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = |\lambda x + \mu y + \nu z|$$

で求められることが解る。

ここで, π の法線 vector を正規化してできる

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix}$$

の成分 λ, μ, ν からなる 3 項列 (λ, μ, ν) を,

平面 π の方向余弦 direction cosine

と呼ぶ。

以上の議論では、平面 π は原点を含まないと仮定していたが、原点 O が π 上にある場合には、 π 上の任意の点 $X(\mathbf{x})$ について $\mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = 0$ が成り立ち、かつこの場合には $\overrightarrow{OX}$ の $\mathbf{n}$ への正射影は 0 となる。従って、この場合、つまり平面 π が原点 O を含む場合にも、上で得られた式 (2.8) が成り立つ。

以上で得られた命題を定理としてまとめておこう：

THEOREM 2.11 (平面の標準形)

$\mathbf{n}$ を法線 vector とする平面 π があり、その上の点を $X(\mathbf{x})$ とする。 $\mathbf{n}$ の方向を正として、原点から π までの有向距離を r とする。

このとき、 $\mathbf{n}$ を正規化してできる vector $\mathbf{u}$ が $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix}$ であるならば、平面 π は

$$\overrightarrow{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{x} = \lambda x + \mu y + \nu z = r$$

と表される。ここで、

- 平面 π に関して、原点 O のある側とは反対方向に $\mathbf{n}$ が向いているならば、 $\mathbf{x}$ と $\mathbf{n}$ のなす角が鋭角となり、 $r > 0$ であり、
- 平面 π に関して、原点 O のある側に $\mathbf{n}$ が向いているならば、 $\mathbf{x}$ と $\mathbf{n}$ のなす角が鈍角となり、 $r < 0$ である。
- また、平面 π が原点を含むならば、 $r = \mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = 0$ となる。

Lecture 3

Vector 空間 $\mathcal{V}_3$ における解析

§ 3-1.

空間における直線と平面

いくつかの重要な概念を、もう一度整理することから始めよう.

3.1.1 空間における直線の方程式

定点 $A(x_0, y_0, z_0)$ を通り, 方向 vector $\vec{\mathbf{d}} = \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$ をもつ直線 ℓ は, parameter t を用いて

$$\ell : \begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

と表される. 方向 vector $\vec{\mathbf{d}}$ のどの成分も 0 でないとき, つまり $lmn \neq 0$ のときは, これから, parameter t を消去することによって, 次の『直線の標準形』を得る:

$$\ell : \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}.$$

l, m, n の内, ただ一つだけが 0 であるときには, 例えば $l = 0$ とすれば直線 ℓ は

$$x = x_0, \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

となり, yz 平面に平行な直線になり, また 2 つの成分が 0 であるときには, 例えば $l = m = 0$ ならば

$$x = x_0, y = y_0, z \in \mathbb{R}$$

となり, z は任意の実数値をとる. これは z 軸に平行な直線になる.

当然, 異なる 2 点 $A(x_0, y_0, z_0), B(x_1, y_1, z_1)$ を通る直線は, $\overrightarrow{\mathbf{AB}} = \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \\ z_1 - z_0 \end{pmatrix}$ を方向 vector

にもつと考えられるから, その方程式は

$$\ell : \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

で表される.

3.1.2 2 直線のなす角

空間において, 2 直線 ℓ, m がなす角を考えよう. もちろん, 一般には空間 $\mathcal{V}_3$ においては 2 直線は交わらず, ねじれの位置にあるから, 交角をいきなり考えることはできない. そこで, それぞれの方向 vector のなす角を用いて, 2 直線のなす角を定義する.

決定的に重要なのに, 意外と理解されていないのが,

直線のなす角 θ は $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, vector のなす角 φ は $0 \leq \varphi \leq \pi$

である, ということである.

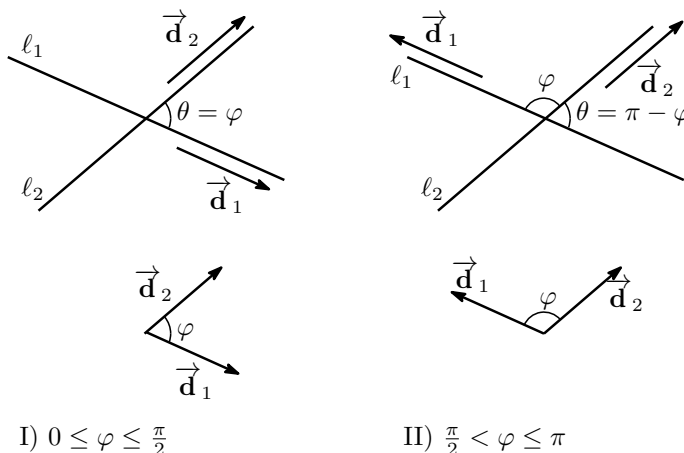


Figure 3.1: 直線のなす角

2 直線 ℓ_1, ℓ_2 の方向 vector が, それぞれ $\vec{d}_1, \vec{d}_2$ であるとする. $\vec{d}_1$ と $\vec{d}_2$ が 1 次独立であれば, $\vec{d}_1$ と $\vec{d}_2$ の張る平面が定まる. その平面上に 2 直線 ℓ_1 と ℓ_2 を平行移動して, その平面上で考える. もし, $\vec{d}_1$ と $\vec{d}_2$ が 1 次従属である場合には, その 2 つの vector のなす角は 0 または π であるから, 2 直線のなす角は 0 としてよい.

そうでない場合を考えよう. 2 直線 ℓ_1, ℓ_2 のなす角を θ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) とし, またそれぞれの方向 vector $\vec{d}_1, \vec{d}_2$ のなす角 $\angle(\vec{d}_1, \vec{d}_2)$ を

$$\angle(\vec{d}_1, \vec{d}_2) = \varphi \quad (0 \leq \varphi \leq \pi)$$

とする.

Case 1.) $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ のとき, $\theta = \varphi$ であり, また $\cos \varphi \geq 0$ であるから

$$\cos \theta = \cos \varphi = |\cos \varphi|.$$

Case 2.) $\frac{\pi}{2} < \varphi \leq \pi$ のとき, $\theta = \pi - \varphi$ であり, また $\cos \varphi < 0$ であるから

$$\cos \theta = \cos(\pi - \varphi) = -\cos \varphi = |\cos \varphi|.$$

従って, いずれの場合にも $\cos \theta = |\cos \varphi|$ が成り立つ.

$\vec{d}_1, \vec{d}_2$ を正規化してそれぞれ $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ とすれば,

$$\cos \varphi = \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = \frac{\vec{d}_1}{|\vec{d}_1|} \cdot \frac{\vec{d}_2}{|\vec{d}_2|}$$

を得る. $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ が直線 ℓ_1, ℓ_2 の方向余弦を表す単位 vector であることに注意すれば, 我々は次を得たことになる:

THEOREM 3.1 (2 直線のなす角)

方向 vector $\vec{d}_1, \vec{d}_2$ をもつ 2 直線 ℓ_1, ℓ_2 のなす角を θ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) とすれば,

$$\cos \theta = |\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2| = \frac{|\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2|}{|\vec{d}_1| |\vec{d}_2|}.$$

$\vec{d}_1 = \begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix}, \vec{d}_2 = \begin{pmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{pmatrix}$ とし, またそれぞれの方向余弦を $(\lambda_1 \mu_1 \nu_1), (\lambda_2 \mu_2 \nu_2)$ とすれば,

$$\cos \theta = |\lambda_1 \lambda_2 + \mu_1 \mu_2 + \nu_1 \nu_2| = \frac{|l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2|}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}$$

となる.

3.1.3 平面の方程式

我々は Lecture 7 において, 平面の法線 vector を用いて次を得た:

- 定点 $A(x_0, y_0, z_0)$ を通り, 法線 vector $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ をもつ平面 π の方程式は

$$\pi : a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

である.

- 一般に, 法線 vector $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ をもつ平面 π は, 方程式

$$\pi : ax + by + cz + d = 0$$

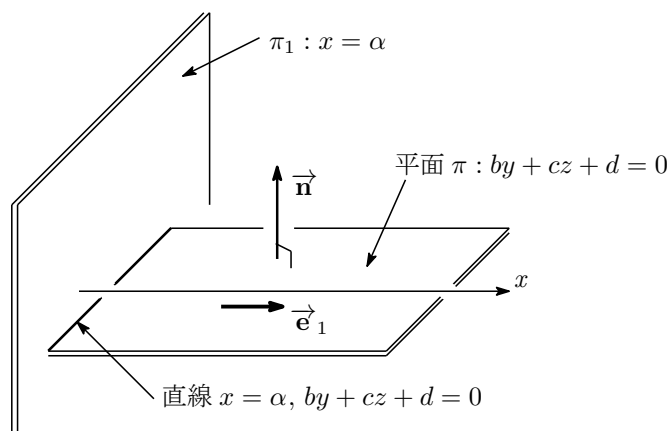
をもつ.

特に, 座標軸に平行な平面について考えてみよう. いま, 平面 π が x 軸に平行だとしてみよう.

このとき, π の法線 vector $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ は, x 軸の方向 vector $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ と垂直であるから, そ

の内積は 0 となる:

$$\vec{n} \cdot \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \iff a = 0.$$

Figure 3.2: y 軸に平行な平面

つまり、このとき平面 π の方程式は

$$by + cz + d = 0$$

となり、 x の項を欠いている。この意味は、

x の任意の値について、 y と z には

$$by + cz + d = 0$$

という関係が成り立っている

ということである。 x をある値 $x = \alpha$ に固定すれば、平面 $x = \alpha$ と平面 $\pi: by + cz + d = 0$ の交線ができるが、その交線は、平面 $x = \alpha$ 上で、やはり $by + cz + d = 0$ という方程式で表される。

$x = \alpha$ を実数上で動かせば、平面 $x = \alpha$ は x 軸と垂直な位置関係を保ちながら平行に移動する。それに伴って、平面 π と平面 $x = \alpha$ との交線としての直線 $by + cz + d = 0$ も平行に移動する。

こうして、もともとの平面 π は直線 $x = \alpha, by + cz + d = 0$ の軌跡と考えることができる。

以上から、あたりまえと言えばあたりまえなのだが、次のようにまとめることができる：

- x 軸に平行な平面は x の項を欠いた $by + cz + d = 0$ で、
- y 軸に平行な平面は y の項を欠いた $ax + cz + d = 0$ で、
- z 軸に平行な平面は z の項を欠いた $ax + by + d = 0$ で、

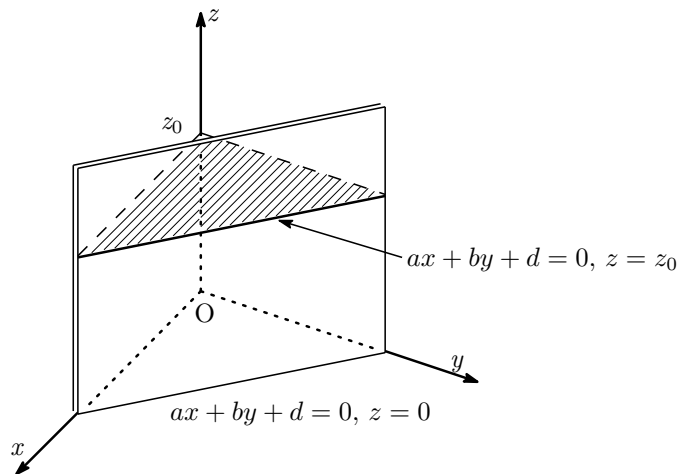
表される。Figure 3.3 (p. 35) では、 z 軸に平行な平面 $ax + by + d = 0$ と、平面 $z = z_0$ との交線の様子を描いた。また、 xy 平面 $z = 0$ との交線は、通常の $\mathcal{V}_2$ における直線の方程式となることにも、納得がいくと思う。

3.1.4 2 平面のなす角

$\mathcal{V}_3$ の 2 平面

$$\pi_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0,$$

$$\pi_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

Figure 3.3: z 軸に平行な平面

のなす角を考えよう．そもそも，平面同士のなす角とはどこを計ったものか，その定義が口から出てくるであろうか．

いま，2 平面 π_1, π_2 が交わり，その交線を ℓ とする．交線 ℓ 上に 1 点 P をとり， P で平面 π_1, π_2 に含まれる垂線を立てる．それぞれ直線 ℓ_1, ℓ_2 としよう．

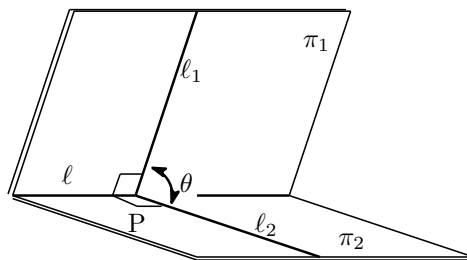


Figure 3.4: 2 平面のなす角

このとき，点 P で交わる 2 直線 ℓ_1, ℓ_2 を含む平面 π が一意的に定まる．この平面上で測った，2 直線 ℓ_1, ℓ_2 のなす角を，2 平面 π_1, π_2 のなす角と定義する．Figure 3.4 (p. 35) の θ である．

このように，2 平面 π_1, π_2 のなす角が θ であるとき，

$$\angle(\pi_1, \pi_2) = \theta$$

と書く．この場合，つまり平面同士のなす角も，直線の場合と同様に，

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

としてよいことが解ると思う．

直線の場合と同様にして証明できるので，次の定理を挙げておき，証明は諸君に委ねようと思う：

THEOREM 3.2 (平面のなす角)

それぞれ法線 vector $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ をもつ平面を π_1, π_2 とし, $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ を正規化して得られる vector をそれぞれ $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ とする.

このとき, π_1, π_2 のなす角 $\angle(\pi_1, \pi_2) = \theta$ について

$$\cos \theta = |\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2| = \left| \frac{\vec{n}_1}{|\vec{n}_1|} \cdot \frac{\vec{n}_2}{|\vec{n}_2|} \right| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}$$

が成り立つ.

平面が

$$\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \quad \pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

である場合には次になる :

$$\cos \theta = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

Proof.

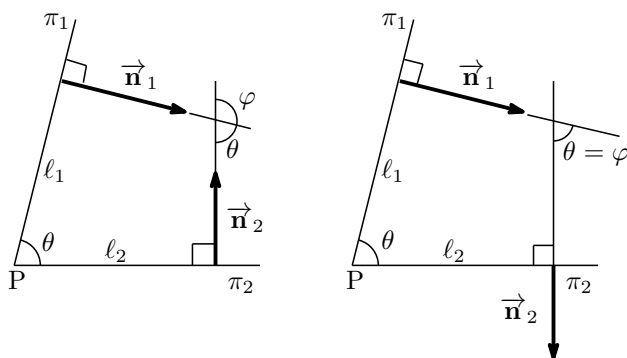


Figure 3.5: 2 平面のなす角

先ほどの Figure 3.4 (p. 35) で説明した 2 直線 l_1, l_2 を含む平面に着目する. 今度も 2 つの場合に分けて証明することになる. 証明のための図 Figure 3.5 (p. 36) を載せておこう. 諸君の奮闘に期待する. ■

3.1.5 点と平面の距離

平面上の vector 幾何の定理として, 我々は点と直線との距離公式を再発見したのを覚えていることと思う. 要は, 法線 vector を正規化した単位 vector と, 直線上の点から問題になっている点への vector との内積, 結局のところ, 法線 vector への正射影 (厳密にはその絶対値) であった.

3 次元空間 $\mathcal{V}_3 = \mathbb{R}^3$ においても, これと完全に相即的な,

点と平面の距離公式

が成り立つ. 次の定理である :

THEOREM 3.3 (点と平面との距離)

平面 $\pi : ax + by + cz + d = 0$ と点 $P(x_0, y_0, z_0)$ について, その間の距離 $\text{dist}(P, \pi)$ は

$$\text{dist}(P, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad (3.1)$$

である. これは, 平面 π の法線 vector を $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ とし, 平面 π 上に任意の点 A をとれば

$$\text{dist}(P, \pi) = \left| \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \cdot \overrightarrow{AP} \right| = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{AP}|}{|\vec{n}|} \quad (3.2)$$

であることを意味する.

Proof.

Figure 3.6 (p. 37) を見られたい.

平面 π の法線 vector $\vec{n}$ を正規化した単位 vector を $\vec{u}$ とする :

$$\vec{u} = \vec{u}_n = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

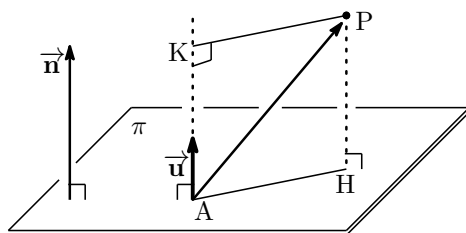


Figure 3.6: 点と平面の距離

平面 π 上に点 $A(x_1, y_1, z_1)$ をとると, $\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} x_0 - x_1 \\ y_0 - y_1 \\ z_0 - z_1 \end{pmatrix}$ であり, $\overrightarrow{AP}$ の $\vec{u}$ への正射影 $\overline{AK} = \text{pr}_u(\overrightarrow{AP})$ は内積 $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AP}$ で求められる :

$$\overline{AK} = \text{pr}_u(\overrightarrow{AP}) = \vec{u} \cdot \overrightarrow{AP} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \cdot \overrightarrow{AP}.$$

この値は,

- $\vec{n}$ と $\overrightarrow{AP}$ が平面 π に関して, 同じ方向に向かう vector ならば正であり,
- $\vec{n}$ と $\overrightarrow{AP}$ が平面 π に関して, 逆の方向に向かう vector ならば負である.

従って, いずれにしても絶対距離 $\text{dist}(P, \pi)$ は, 式 (3.2) で求められる.

正射影を成分で表せば, A が $\pi : ax + by + cz + d = 0$ 上の点であることから

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{AP} &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 - x_1 \\ y_0 - y_1 \\ z_0 - z_1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 - (ax_1 + by_1 + cz_1)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ &= \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad \because ax_1 + by_1 + cz_1 = -d\end{aligned}$$

が成り立つ. 距離 $\text{dist}(P, \pi)$ はこの絶対値であるから, 式 (3.1) を得る. ■

以上の証明で,

空間における正領域・負領域

という概念が, 平面において直線 $\ell : ax + by + c = 0$ ごとに定まったこととの類比が成立していることに気がついたと思う. まとめれば, 次の定理になる:

THEOREM 3.4 (空間における正領域・負領域)

平面 $\pi : ax + by + cz + d = 0$ が与えられたとき, x, y, z の 1 次式 $ax + by + cz + d$ を $f(x, y, z) = ax + by + cz + d$ とすれば,

- $f(x, y, z)$ の正領域 $\mathcal{D}_f^+ = \{(x, y, z) \mid f(x, y, z) > 0\}$ は, 平面 π に関して, その法線

vector $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ の向かう側であり,

- $f(x, y, z)$ の負領域 $\mathcal{D}_f^- = \{(x, y, z) \mid f(x, y, z) < 0\}$ は, 平面 π に関して, その法線

vector $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ の向かう側と反対の側, つまり $-\vec{n}$ に向かう側である.

Proof.

証明は, 平面の場合をそのままなぞれば得られる. ■

§ 3-2.

平面と直線の位置関係

3.2.1 直線の一般形 – 平面の交線として

既に我々は, 空間 $\mathcal{V}_3 = \mathbb{R}^3$ における直線の表現を知っている. この Lecture の §. 3.1.1 (p. 31) で示した通りである. その式は, 直線上の定点と, その直線の方角 vector によって, 直線を決定するものであった.

しかし, 空間において直線が一意に決定されるのは, その場合ばかりではない. もう一つ,

2 平面の交線としての直線

としても, 直線はただ 1 つ定まる. この観点から, 平面と直線の位置関係を考察しよう.

いま, 2 平面

$$\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \quad \pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

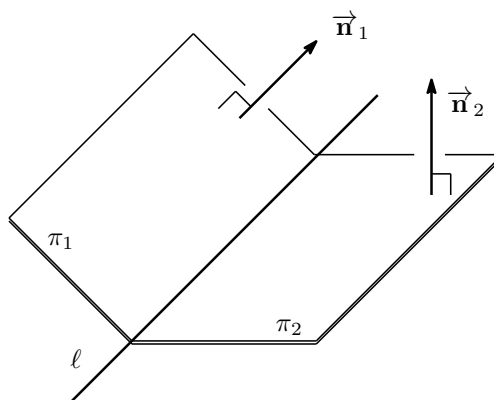


Figure 3.7: 2 平面の交わりとしての直線

が与えられたとし、それぞれの法線 vector を $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$, $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$ とする.

この 2 平面 π_1, π_2 が交わる、つまりそれぞれの平面を点の集合と考えたとき、集合としての共通部分をもつ、のは、次の場合がある：

- $\vec{n}_1 // \vec{n}_2$ かつ $d_1 = d_2$ のとき. このとき、2 平面 π_1, π_2 は一致してしまい、共通部分は $\pi_1 \cap \pi_2 = \pi_1 = \pi_2$ となる.
- $\vec{n}_1$ と $\vec{n}_2$ が 1 次独立のとき. このとき、共通部分は直線となる. この直線を

2 平面 π_1, π_2 の交線 line of intersection

と言う.

この 2 つ目の場合を考えよう. 2 平面 π_1 と π_2 の交線を ℓ とする. 点 $P(X, Y, Z)$ が ℓ 上にあれば、 P は π_1 上の点でもあり、かつ π_2 上の点でもあるから、 $x = X, y = Y, z = Z$ は π_1, π_2 の

方程式をいずれもみたす. つまり $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ は、連立方程式

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

の解 vector である.

逆に、点 $P(X, Y, Z)$ の座標 $x = X, y = Y, z = Z$ が連立方程式 (3.3) をみたすならば、点 P は平面 π_1 上の点でもあり、かつ π_2 上の点でもあるから、 $P \in \pi_1 \cap \pi_2$ 、つまり点 P は π_1 と π_2 の共通部分である交線 ℓ 上の点である.

こうして、直線の表現について次の定理を得る：

THEOREM 3.5 (平面の交線としての直線)

1 次独立な法線 vector をもつ 2 平面

$$\pi_1 : f_1(x, y, z) = a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0,$$

$$\pi_2 : f_2(x, y, z) = a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

について, x, y, z の連立方程式 (3.3) (p. 39), つまり

$$\begin{cases} f_1(x, y, z) = 0, \\ f_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

は, それぞれの方程式が表す平面の交線 ℓ を表す.

この形を**直線の一般形**と言う.

この観点から, 既に我々が得ている直線の表現

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

を見直してみよう. この式を隣り合う辺同士でつなげて 2 つに分ければ

$$\begin{cases} \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}, \\ \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \end{cases} \iff \begin{cases} bx - ay - (bx_0 - ay_0) = 0, \\ cy - bz - (cy_0 - bz_0) = 0 \end{cases}$$

となるが, これはそれぞれ, $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} b \\ -a \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ -b \end{pmatrix}$ をもつ 2 平面

$$\pi_1 : bx - ay - (bx_0 - ay_0) = 0, \quad \pi_2 : cy - bz - (cy_0 - bz_0) = 0$$

の交線であることが解る.

3.2.2 直線と平面のなす角

直線と平面のなす角について, 特にそれらが垂直である場合については既に考察してある. ここでは一般に, 直線と平面が交わるとき, そのなす角を定義し, それを直線の方角 vector と平面の法線 vector を用いて表すことを考えよう.

まず, 直線と平面が交わらない (つまり平行である) か, または直線が平面に含まれている場合には, そのなす角は 0 であるとする.

直線 ℓ と平面 π が点 A で交わる場合を考えよう.

直線 ℓ 上に, 点 A とは異なる点 P をとれば, P は平面 π 上にはないから, P から平面 π に垂線を下すことができる. その足を H とする. 3 点 A, P, H は 1 つの平面を定めるから, その平面上で角 $\angle PAH$ を測ることができる. この角を θ として, これを直線 ℓ と平面 π のなす角 $\angle(\ell, \pi)$ と定義する. この角は結局平面 PAH 上の, 直線 ℓ と直線 AH とのなす角に他ならないから, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ とすることができる.

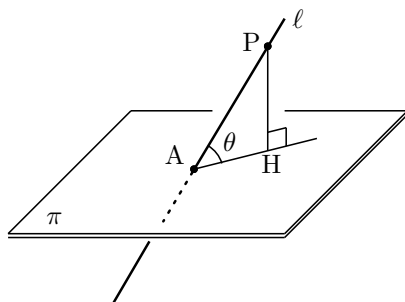


Figure 3.8: 直線と平面のなす角

もし直線 ℓ が平面 π と垂直であれば, ℓ 上の点 P から π に下した垂線の足 H は A に一致してしまい, 直線 AH は定まらないが, この場合には, 平面と直線の垂直条件より ℓ は π に含まれる任意の直線と垂直であるから, ℓ と π とのなす角を $\frac{\pi}{2}$ とすることが出来る.

以上が, 空間 E_3 における直線と平面のなす角の定義である.

このように定義された平面と直線のなす角について, 次が成り立つ:

THEOREM 3.6 (直線と平面のなす角)

空間の直線 ℓ と平面 π について,

$$\ell : \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}, \quad \pi : ax + by + cz + d = 0$$

であるとする. このとき, ℓ と π のなす角 $\angle(\ell, \pi) = \theta$ について

$$\sin \theta = \frac{|la + mb + nc|}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad (3.4)$$

が成り立つ. これは, ℓ の方向 vector $\vec{d}$ と平面 π の法線 vector $\vec{n}$ を用いて書き直せば

$$\sin \theta = \left| \frac{\vec{d}}{|\vec{d}|} \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \right| = |\vec{u}_d \cdot \vec{u}_n| \quad (3.5)$$

である. ここで, $\vec{u}_d, \vec{u}_n$ は, $\vec{d}, \vec{n}$ を正規化した vector であり, それはそれぞれ直線 ℓ の方向余弦, 平面 π の方向余弦 (厳密には, それを列 vector と解釈したもの) である.

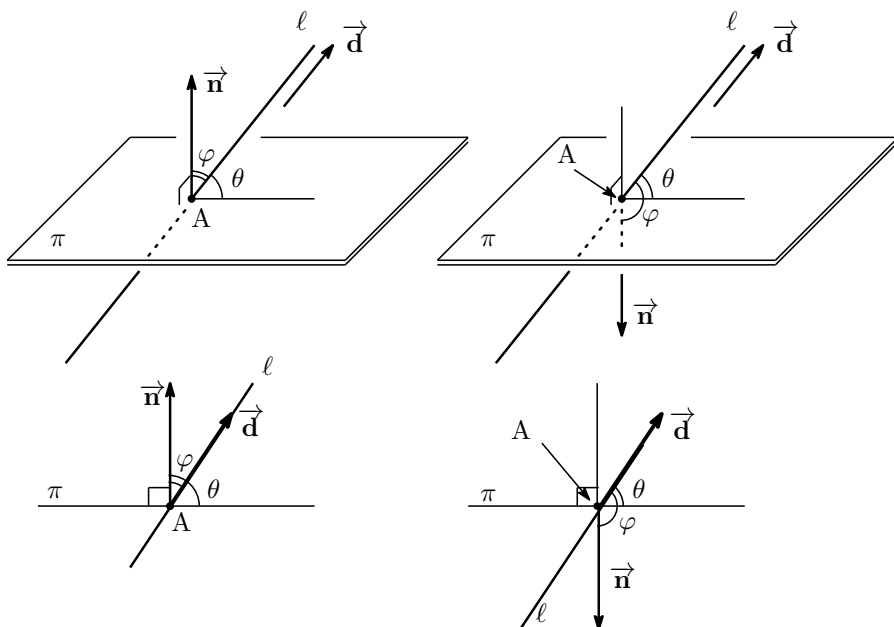


Figure 3.9: 方向 vector と法線 vector

Proof.

いま、平面 π の法線 vector $\vec{n}$ と直線 ℓ の方向 vector $\vec{d}$ のなす角を φ ($0 \leq \varphi \leq \pi$) とする。Figure 3.9 (p. 42) のように、

$$\text{i) } 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{と} \quad \text{ii) } \frac{\pi}{2} < \varphi \leq \pi$$

の場合に分ける。

Case 1.) $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ のとき、 $\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi$ であるから、

$$\sin \theta = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) = \cos \varphi \geq 0$$

である。

Case 2.) $\frac{\pi}{2} < \varphi \leq \pi$ のとき、 $\theta = \varphi - \frac{\pi}{2}$ であるから、

$$\sin \theta = \sin \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) = -\cos \varphi \geq 0$$

である。

いずれにしても $\sin \theta \geq 0$ であり、それは $\sin \theta = |\cos \varphi|$ で求められる。

φ は 2 つの vector $\vec{d}$ と $\vec{n}$ のなす角であるから、それぞれを正規化した vector を $\vec{u}_d = \frac{\vec{d}}{|\vec{d}|}$, $\vec{u}_n = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$ とすれば、そのなす角 $\varphi = \angle(\vec{d}, \vec{n})$ の余弦は

$$\cos \varphi = \vec{u}_d \cdot \vec{u}_n = \frac{\vec{d}}{|\vec{d}|} \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$$

で求められるから、

$$\sin \theta = |\cos \varphi| = |\vec{u}_d \cdot \vec{u}_n| = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}|}{|\vec{d}| |\vec{n}|}$$

である。これで (3.5) (p. 41) が示された。

$\vec{d} = \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$, $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ であるから, それぞれを正規化して方向余弦 vector $\vec{u}_d, \vec{u}_n$ を作れば

$$\vec{u}_d = \frac{1}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}} \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_n = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

であるから, これを (3.5) (p. 41) に代入して, 成分による表現 (3.4) (p. 41) を得る. ■

3.2.3 交線の方 vector

さて, 今回の話の中では, せっかくやった vector の外積というヤツの出番がナカナカなかった. そこで, いよいよ登場である. 2 平面の交線を, vector の外積という観点から見てみよう.

意外と意識されていないので戸惑うのだが, $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ をそれぞれ法線 vector にもつ 2 平面 π_1, π_2 の交線を ℓ とする. このとき, ℓ は, 2 平面の法線 vector $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ のいずれとも垂直であることをご存知であろうか.

もちろん, 平面の法線 vector について初めて真剣に考えた, という諸君もいると思う. いい機会なので, 是非ともここで納得して欲しい.

Figure 3.10 (p. 43) のように, 交線 ℓ 上に任意の点 P をとる. $\vec{n}_1$ は平面 π_1 上にある任意の直線と垂直であるから, 特に交線 ℓ とも垂直である. 同様なことが, π_2 の法線 vector $\vec{n}_2$ と交線 ℓ についても言える. 従って

$$\vec{n}_1 \perp \ell \text{ かつ } \vec{n}_2 \perp \ell$$

が成り立つ.

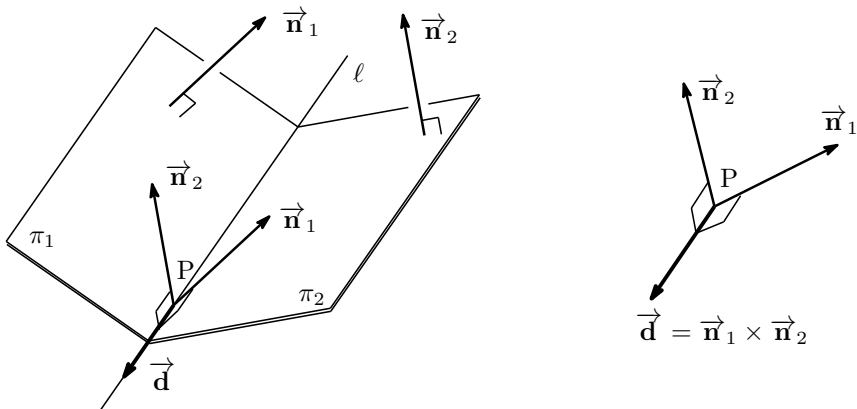


Figure 3.10: 交線の方 vector

従って, 交線 ℓ の方向 vector $\vec{d}$ は, 2 平面 π_1, π_2 の法線 vector $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ のいずれにも垂直な vector となる.

では, この

$$\vec{d} \perp \vec{n}_1, \quad \vec{d} \perp \vec{n}_2$$

をみたす ℓ の方向 vector $\vec{d}$ をどう求めるか？ここで膝を打たなきゃ、M2X に出ている甲斐がない、というものだ。その通り、2 平面 π_1, π_2 の法線 vector $\vec{n}_1$ と $\vec{n}_2$ の外積・vector 積 $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ そのものではないか!!

以上より、次が言える：

THEOREM 3.7 (2 平面の交線の方 vector)

交わる 2 平面 π_1, π_2 の法線 vector をそれぞれ $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ とし、またその交線を ℓ とする。

このとき、交線 ℓ の方向 vector $\vec{d}$ として

$$\vec{d} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$$

とすることができる。特に

$$\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \quad \pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

とすれば、 ℓ の方向 vector $\vec{d}$ の一つは

$$\vec{d} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1c_2 - b_2c_1 \\ c_1a_2 - c_2a_1 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

である。従って、交線 ℓ 上に 定点 $A(x_0, y_0, z_0)$ と動点 $P(x, y, z)$ をとれば、交線 ℓ の parameter 表示は

$$\overrightarrow{AP} = t(\vec{n}_1 \times \vec{n}_2) \iff \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} b_1c_2 - b_2c_1 \\ c_1a_2 - c_2a_1 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$$

となり、よって標準形

$$\ell : \frac{x - x_0}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y - y_0}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{z - z_0}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

を得る。

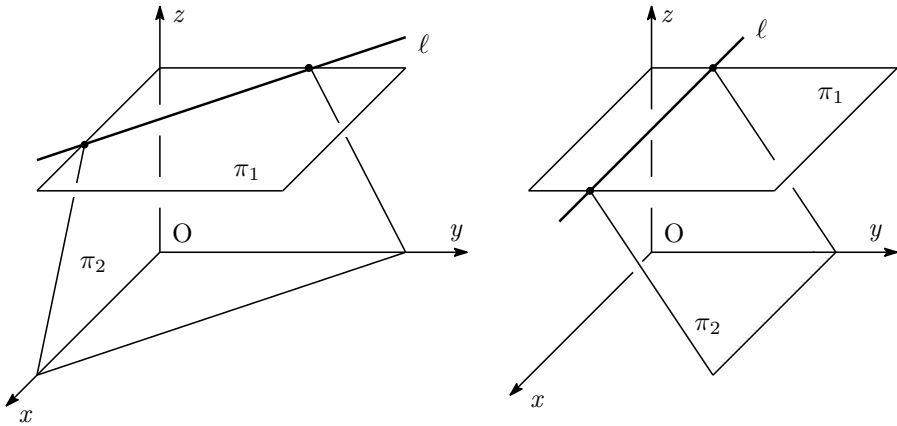
では、具体的に、2 平面が与えられたとき、その交線の標準形を求めるためにはどうすればいいか、を考えよう。いま、

$$\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \quad \pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

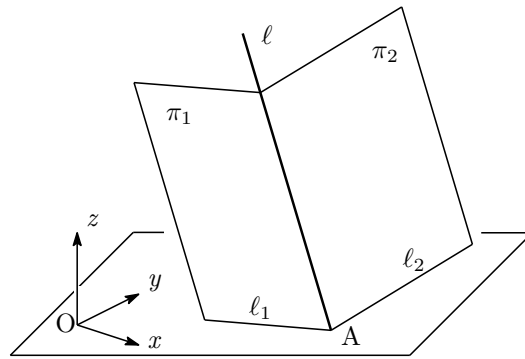
とする。

一般に、平面 π_1 が xy 平面、つまり $z = 0$ と交わらないのは、その平面 π_1 が $z = k$ ($k \neq 0$) という形をしている場合しかない。Figure 3.11 (p. 45) を見られたい。まず、左側の場合である。この場合には、他の平面 π_2 との共有点も z 座標は k であるから、その平面 π_2 の方程式に $z = k$ を代入してよい。こうして得られる方程式は $a_2x + b_2y + C = 0$ という形をしているはずであるから、 a_2 が 0 でないならば、 $y = 0$ を代入して、交線上の定点 $A\left(-\frac{C}{a_2}, 0, k\right)$ を得る。

次に、Figure 3.11 (p. 45) の右側のように、もし a_2 が 0 であれば、平面 $\pi_2 : b_2y + c_2z + d_2 = 0$ は x 軸と平行になり、 $z = k$ を代入して y について解いた値が交線上の点の y 座標になる。この場合は x 座標は任意である。なぜならば、 π_1 と π_2 の両方が、 x 軸に平行だからである。このと

Figure 3.11: 一方の平面が $z = 0$ と交わらないとき

きは、交線そのものが x 軸に平行になる.

Figure 3.12: 2 平面とも $z = 0$ と交わる場合

以上で例外的な場合の話は済んだ. これ以外の場合は, 2 平面 π_1, π_2 のいずれも 平面 $z = 0$, つまり xy 平面と交わる. 従って, π_1 と π_2 の交線 ℓ も, xy 平面と共有点をもつ. 逆に言えば, 交線 ℓ と xy 平面との交点は, π_1 と xy 平面との交線 ℓ_1 と, π_2 と xy 平面との交線 ℓ_2 との交点である.

ℓ_1, ℓ_2 の方程式は, それぞれ平面 π_1, π_2 の方程式に $x = 0$ を代入した

$$\ell_1 : b_1 y + c_1 z + d_1 = 0, \quad \ell_2 : b_2 y + c_2 z + d_2 = 0, \quad x = 0$$

であるから, 交点を求めることができる. その交点を, 2 平面の交線 ℓ 上の交点として用いれば, Theorem 3.7 (p. 44) によって, 交線の標準形が常に求められることになる.