Gap- および cGap- Subsets について
A Note on the Gap- and cGap- subsets.

YAMASHITA, Koichiro (kymst) *

Mon Sep 03 15:09:29 2012 JST

This document is ML3docu No.20120903CT.
Key word: Combinatory Theory, Finite Sets, Reccurence Formula, Fibonacci and Lucas Sequence, Coding Theory.

mail to: `kymstkymst@gmail.com`
We hope your math exciting, your hack happy, and whole lotta love.   :-)

Abstract

$n \in \mathbb{Z}^+$ として $(n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ の部分集合で，隣接する要素の対を含まないものを **gap subset**，また両端の要素 1 と n を隣接していると考えた場合に，隣接要素の対を含まないものを**巡回的 gap subset** と呼ぶ.

それぞれの個数を G_n, K_n で表すとき，Fibonacci 列や Lucas 列と同じ帰納関係

$$G_{n+2} = G_{n+1} + G_n, \quad K_{n+2} = K_{n+1} + K_n$$

が成立する．この関係を 2 項係数の計算を経ることなしに，$(n]$ の部分集合を符号化 (encoding) して得られる 2 値文字列 (binary words) 上で定義された連接演算 (concatenation) のみから導く．更に，Fibonacci/Lucas 数の間に成立するいくつかの恒等式にも，この 2 値文字列上の関係から新たな証明を与える.

これらの文字列とそれを復号化して得られる部分集合を生成する algorithm を，Emacs Lisp という program 言語により実装した．また，筆者の歳若き友人 滝脇知也氏と SEIYA 氏は，それぞれ関数型言語 Haskell，及び 王道言語 C++ による program を書いてくれた．これらの program source とその出力結果を Appendix とした．(Sun Sep 16 14:11:09 2012 JST, Not Yet Written.)

英語に関して，筆者の拙い疑問に答えてくれた Y. A. 先生に感謝します.

Abstract

Among all subsets of $(n] = \{1, 2, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{Z}^+$, one which includes no pair of adjacent elements is called a *gap subset* of $(n]$, and G_n means the total number of these gap subsets of $(n]$.

Next, when the relation "being adjacent" is interpreted as in (mod n) (so in $(n]$, 1 and n are adjacent elements), one which includes no pair of adjacent

* Free Math Forum by `kymst` FMFk(url: `http://kymst.net/`)

elements in this meaning is called a *circular gap subset* of $(n]$, and K_n means the number of these circular gap subsets of $(n]$.

In the following, it is shown that G_n and K_n have the same recurrence relation as of Fibonacci and Lucas sequence, that is, it holds that

$$G_{n+2} = G_{n+1} + G_n, \quad K_{n+2} = K_{n+1} + K_n.$$

Of course, this relation can be proved by calculating the binomials. But the author will show this result by encoding the subsets of $(n]$ to binary words on alphabet set $\{0, 1\}$, and by using the most simple operations on these binary words called concatenation. And as by-products, we can re-prove some of identity-relations between the Fibonacci/Lucas numbers from this encoding-decoding strategy.

The algorithm which generates these binary words and corresponding gap- / cgap- subsets can be implemented on the computer. The author wrote the program in the language Emacs Lisp, and two of his young friends TAKIWAKI, Tomoya and SEIYA wrote it in the languages Haskell and C++. In Appendix, the programs and the outputs are included. (Sun Sep 16 14:11:09 2012 JST, Not Yet Written.)

The author thanks much to Mr. Y. A. for giving clear answers to poor questions about English.

Contents

1 Small Preparations 2
 1.1 Finite Sets and memwords 2
 1.2 Fibonacci and Lucas Numbers 3

2 Gap and Circular Gap Subsets 5
 2.1 Definition of Gap and c-Gap 5
 2.2 Gapsets の帰納関係 5
 2.3 Circular Gap Subsets 8
 2.4 Notes by `kymst`. 11

3 Some Corollaries 12
 3.1 Pavlov's ... NO! NO! Pascal's Triangle 13
 3.2 G_n と K_n の関係 16

4 Appendix — Inplementation on Computer 18

1 Small Preparations

1.1 Finite Sets and memwords

以下，$n \in \mathbb{N}$ として，集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ を $(n]$ で表わす．“(” は 0 が含まれないことを，また “]” は n が含まれることを表わす．$(1]$ は $\{1\}$ であり，$(2]$ は $\{1, 2\}$ である．特に $(0]$ は空集合 $\emptyset$ である．同様にして $[n)$ は $\{0, 1, 2 \dots, n-1\}$ であるから，mod n での最小非負剰余である．

$(n]$ の部分集合は 2^n 個ある．これらの部分集合全体からなる集合を $(n]$ の**べき集合** *power set*

と言い，それを $\mathfrak{P}(n]$ または $2^{(n]}$ で表わす．有限集合 A について，その要素の個数を $\sharp A$ で表わせば

$$\sharp 2^A = 2^{\sharp A}$$

が成り立つ．

一般に，集合 A について，A から **2 値集合** $B = \{0, 1\}$ への写像 χ が定まれば，A の部分集合 S が定まる．任意の $a \in A$ について *binary set*

$$a \in S \iff \chi(a) = 1, \qquad a \notin S \iff \chi(a) = 0$$

とすることができるからである．この写像 χ を部分集合 S の**特性関数**と呼ぶ． *characteristic function*

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ とする．$B \subseteq A$ の特性関数を $\chi_B = \chi$ として，$\chi(a_1), \chi(a_2), \dots, \chi(a_n)$ をこの順にすべて並べてできる長さ n の **2 値文字列** *binary string*

$$w = (\chi_B(a_1)\chi_B(a_2)\dots\chi_B(a_n)) \quad (\forall k \in (n] : \chi_B(a_k) \in B = \{0, 1\})$$

は部分集合 B についての**帰属関係**を特定する**語**である．その意味で，この w を ***memword*** と呼ぶことにする [*1]． *membership relation, word*

例えば $A = (6] = \{1, 2, \dots, 6\}$ とする．$S \subseteq A$ について S の memword を w_S，S の特性関数を $\chi_S = \chi$ として

$$w_S = (010011) \iff \chi(2) = \chi(5) = \chi(6) = 1, \chi(1) = \chi(3) = \chi(4) = 0 \iff S = \{2, 5, 6\}$$

となる．また，一般に $n \in \mathbb{Z}^+$ として，特に

$$w_S = (\underbrace{00\dots0}_{n\,\text{letters}}) \iff S = \emptyset, \quad w_S = (\underbrace{11\dots1}_{n\,\text{letters}}) \iff S = (n]$$

である．

このように，ある集合 S から，それに対応する memword w_S を作ることを，集合 S の**符号化**と言い，逆に w_S から集合 S を復元することを w_S の**復号化**と言う． *encoding, decoding*

以下では，誤解の恐れがない限りで，memword を包む外側の parentheses “(” と “)” は省略する．

1.2 Fibonacci and Lucas Numbers

Fibonacci 数列については確認の必要はないであろう： *Fibonacci Sequence*

$$(f_n) : \ f_0 = 0, \ f_1 = 1, \ f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$$

で定まる $\mathbb{N}$ 上の列である．この第 n 項は

$$f_n = \frac{\gamma_+^n - \gamma_-^n}{\gamma_+ - \gamma_-}, \qquad \gamma_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \text{ (Sign resp.)}$$

Fibonacci 数列と相補的な関係にある数列として，**Lucas 数列**がある．その定義は *Lucas Sequence*

[*1] MemberShip を特定する Word であるからと言って，MS-Word などと略してはならない．下品であるからばかりではない．あるべきではないものをはびこらせることはクラウドなファシズムであり，使う側の無知は，時としてナチスに加担した衆愚，愚民の犯したのにも似た犯罪にもなりうるのだ．それを「情報」なる授業で広めている低等学校とか言う公共教育機関さえあると聴いた．

全国民が「一億一丸火の玉だ!」と叫ぶことなく愚かになろうとしているこの国で，ただ一片の知の輝きを，消え去ろうとする最後の識の炎を，守りたいと思う．すべて自分の愚かさへの恐怖，危惧の故であり，非日常の日常化から日常の非日常化への絶望的飛躍のためである．

Hacker たれ! mouse を葬れ! Emacs を拡張せよ! (vi でもイイケド...) TEX-nician たれ!

$$(l_n):\ l_0 = 2,\ l_1 = 1,\ l_{n+2} = l_{n+1} + l_n$$

であり，第 n 項は

$$l_n = \gamma_+^n + \gamma_-^n$$

で与えられる．確かめられたい．

Fibonacci 列と Lucas 列の最初をいくつか並べてみると，次の Table を得る：

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
f_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	...
l_n	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	199	...

あまり歴史的な側面に踏み込むつもりはないが，Lucas 列については一言だけ触れておきたい．Franois Edouard Anatole Lucas は 1842 年に生まれ，1891 年に没した France の数学者である．素数の判定法など整数論における研究を残した．今日でも Lucas Test，あるいはそれを D. H. Lehmer (アメリカの数学者．1905-1991. Donald Knuth のお師匠筋に当たる) が拡張した Lucas-Lehmer Test という名の，素数判定の方法が用いられている．

同時に，Lucas は Fibonacci 列についての組織的研究を行なった．その成果が，1878 年の *American Journal of Mathematics* (*A.J.M.*) の創刊号，Vol. 1 に “Théorie des Fonctions Numériques Simplement Périodiques” として，2 部に分けて掲載された (pp. 184-240, 289-321). Lucas [Luc78] である[*2]．「単純周期をもつ整数論的関数についての理論」といったところか．『アメリカ数学雑誌』*A.J.M.* の船出である．フランスの大御所に論文を依頼したのであろう．

この Française で書かれた論文の第 1 部が，その後 Sidney Kravitz によって英訳され，Douglas Lind の編集を経て，あの Fibonacci Association から単行本として *The Theory of Simply Periodic Numerical Functions.* という Title で出版された．1969 年のことである．この英訳版は，今日 (Feb. 2012) では Fibonacci Association の Web page から DL することができる (Lucas [Luc69])：

url: `http://www.mathstat.dal.ca/Fibonacci/`

原著の Française と English Translation を突き合わせつつ，これも翻訳途中であるが，冒頭部分に圧倒された．以下，その拙訳である：

> この論文の目標は，2 次方程式の根の対称関数の研究と，その素数論への応用である．まず最初にこれらの対称関数が円関数，及び双曲線関数と完全な類比性をもっていることを明らかにする．次に，これらの対称関数が，行列式論，組合せ論的解析，連分数，整除性，平方因子，連べき根，円分方程式，2 次の Diophantine 解析，平方剰余，大きな整数の素因数分解，などについての理論との間にもつ関係性を示そう．この考察は，有理係数の任意次数の方程式の根の対称関数についての研究，そしてそれらと楕円関数や Abel 関数，高次べき剰余，高次の Diophantine 解析との間の関係についての，より一層網羅的な研究の出発点となるものである．

たかが 2 次方程式の根の対称式，それが本当にこれ程までに多岐に渡る話題に通じ

[*2] Internet Archive の collection americana で入手可能である．

ているとは!? というのが，正直な感想であった．というか，今でもそう思っている．この翻訳も急ぎたいが……

ともあれ，Lucas 数，Lucas 列という呼び方は，彼のこの論文を中心にした研究に由来することは確かであろう．

2 Gap and Circular Gap Subsets

2.1 Definition of Gap and c-Gap

$(n] = \{1, 2 \ldots, n\}$ とする．$(n]$ の部分集合で，隣接する 2 整数を含まないようなものを $(n]$ の **Gap Subsets**，略して **gapsets** と呼ぶことにしよう． 例えば $n = 6$ として $\{1, 3, 4, 6\}$ は gapset ではないが，$\{2, 4, 6\}$ は gapset である．この **隣接関係**を N で表わす：$a, b \in (n]$ についてその絶対差 $\left|a - b\right|$ を $a \sim b$ で表わせば

neighborhood relation, adjacent rel.

$$aNb \iff a \sim b = 1$$

であり，S が gapset であるとは

$$k \in S \iff \neg\exists j \in (n] : kNj \iff \forall j \in (n] : \neg kNj \tag{1}$$

が任意の k について成り立つことである．$n \in \mathbb{Z}^+$ について，集合 $(n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ に包まれる gapsets の総数を G_n で表わす．

更に， mod n として，n と 1 は隣接していると考えよう．時計の文字盤で 12 と 1 は隣接している．これは， mod 12 における隣接関係を定義することに他ならない．この**巡回的隣接関係** を N^* で表わす：

circular neighborhood (adjacent) relation

$$aN^*b \iff \left|a - b\right| \equiv 1 \pmod{n}.$$

隣接関係を N でなく巡回的な N^* で考えて gapset を作るとき，その gapset を **巡回的 (Circular) Gap Subsets**， 略して **c-gapsets** と呼ぶことにしよう．例えば $n = 6$ として，$\{1, 3, 5\}$ は gapset であるとともに c-gapset である．それに対して $\{1, 3, 6\}$ は gapset ではあるが，$1N^*6$ が成り立つから c-gapset ではない．

c-gapset の定義は，上の gapset についての定義式 (1) の隣接関係 N を形式的に巡回的な N^* に書き換えれば得られる．つまり，S が c-gapset であるとは

$$k \in S \iff \neg\exists j \in (n] : kN^*j \iff \forall j \in (n] : \neg kN^*j \tag{2}$$

が任意の k について成り立つことである．$(n]$ に包まれる c-gapsets の総数を K_n で表わす．

2.2 Gapsets の帰納関係

小さな n について G_n を求めてみよう．Table 1 (p.6) を見られたい．

次は直ちに見て取れる：

- Fibonacci 列と同じ帰納関係式 $G_{n+2} = G_{n+1} + G_n$ が成り立ちそうであること．
- 列 (G_n) は Fibonacci 列 (f_n) と 2 項分のずれをもつこと，つまり $G_n = f_{n+2}$.

そこで，第 1 点の帰納関係をより鮮明にするために，この Table 1 に現われる gapset をすべて binary word に encoding してみよう．$(n]$ に包まれる gapset S を encoding

Table1 Gap Subsets S の個数 G_n

n	G_n	$(n]$	gapsets S
0	1	$\emptyset$	$\emptyset$.
1	2	$\{1\}$	$\emptyset$, $\{1\}$.
2	3	$\{1,2\}$	$\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$.
3	5	$\{1,2,3\}$	$\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1,3\}$.
4	8	$\{1,2,3,4\}$	$\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4\}$, $\{2,4\}$.

してできる語は，長さ n の binary word であり，かつ 1 が隣接しないものである．このような語を ***gapword*** と呼び，その全体を集合 W_n で表わそう．$n=5$ までの gapword を Table 2 にまとめた．

Table2 Gapsets の encoding

n	G_n	Gapwords W_n
0	1	ε
1	2	0, 1
2	3	00, 10, / 01
3	5	000, 100, 010 / 001, 101
4	8	0000, 1000, 0100, 0010, 1010, / 0001, 1001, 0101
5	13	00000, 10000, 01000, 00100, 10100, 00010, 10010, 01010, /
		00001, 10001, 01001, 00101, 10101

2 点ほど，注意してほしい．

*1. ここで，ε は**空の文字列**，**空列** を表わす．$n=0$ のとき，$(0]$ は $\{k \in \mathbb{N} | 0 < k \leq 0\}$ であるから，もちろん空集合 $\emptyset$ である．空集合は任意の集合の，従って空集合の，部分集合であり，また隣接整数を含まないから gapset の定義をみたす．よって $n \geq 1$ であれば，その部分集合としての空集合は $\underbrace{00\ldots0}_{n\,\text{letters}}$ と encode できる．ところが，$n=0$ のときは，同じ空集合が長さが 0 の語によって encode されなければならない．このような語は「空の語」，「空の文字列」以外ない．それを ε で表わす．つまり

empty string

$$\emptyset \subseteq (0] = \emptyset$$

の左辺を encode したものが ε であるのに対して，

$$\emptyset \subseteq (1] = \{1\}$$

の左辺を encode したものが 0 である．

*2. Gapwords を列挙した右側の欄で，slash / よりも左に並べた語は，1 つ上の行にある語の末尾に 0 を**連接**してできる語である．それに対して，/ よりも右に並べた語 ($n=5$ の場合は 2 行目) は，2 つ上の行にある語の末尾に 01 を連接した語である．

concatenation

この第 2 の点に気がつけば，帰納関係 $G_{n+2} = G_{n+1} + G_n$ は直ちに示される．以下，アタリマエのことを厳密に示そうとなると，こういうことになる，という例として読んで欲しい．

一般に，語 x の後ろに語 y を繋げて新しい語 w を作ることを，x と y を**連接する**と言い，$w = x\frown y$ で表わす．x や y が単独の文字である場合も認める．例えば *concatenate*

$$101\frown 01 = 10101, \quad 1010\frown 0 = 10100$$

などである．

THEOREM 2.1 (Gap Subsets の個数 G_n の帰納関係)

$n \in \mathbb{N}$ について，$(n]$ に包まれる gap subsets の個数 G_n は，次の帰納関係式をみたす：

$$G_{n+2} = G_{n+1} + G_n.$$

Proof.

$(n+2]$ に包まれる gapsets を encode して，長さ $n+2$ の gapwords の集合を作り，それを W_{n+2} とする．この集合 W_{n+2} を，その要素の末尾が 0 であるか 1 であるか，に着目して，末尾が 0 であるような語の集合を C_0，末尾が 1 であるような語の集合を C_1 とする．このとき，C_0 と C_1 は次のように定義されることに注意せよ：

$$C_0 = \{w \in W_{n+2} \,|\, \exists x \in W_{n+1} : w = x\frown 0\},$$
$$C_1 = \{w \in W_{n+2} \,|\, \exists x \in W_{n+1} : w = x\frown 1\}.$$

明らかに $C_0 \cup C_1 = W_{n+2}$ であり，かつ $C_0 \cap C_1 = \emptyset$ であるから，C_0, C_1 は確かに W_{n+2} の類別である．このようなとき，W_{n+2} は C_0 と C_1 の**直和** (*direct sum*) である，と言い，$W_{n+2} = C_0 \uplus C_1$ と表わす．類別とは集合の直和への分解に他ならない．

W_{n+1} から C_0 への全単射，W_n から C_1 への全単射，が存在することが言えれば，

$$G_{n+2} = \sharp W_{n+2} = \sharp(C_0 \uplus C_1) = \sharp C_0 + \sharp C_1 = \sharp W_{n+1} + \sharp W_n = G_{n+1} + G_n$$

が言えて，帰納関係式が成り立つことの証明が完成する．

まず C_0 と W_{n+1} の間に全単射を構成する．W_{n+1} から C_0 への写像 $f : W_{n+1} \to C_0$ を $f : x \mapsto x\frown 0$ により定義する．この f と任意の $x_1, x_2 \in W_{n+1}$ について

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1\frown 0 = x_2\frown 0 \Rightarrow x_1 = x_2$$

が成り立つから，f は単射である．また，任意の $y \in C_0$ について，

$$y = x\frown 0 \land x \in W_{n+1}$$

をみたす $x \in W_{n+1}$ が存在するから，f は全射でもある．よって f は W_{n+1} から C_0 への全単射となり，W_{n+1} と C_0 は集合として対等だから，$\sharp C_0 = \sharp W_{n+1} = G_{n+1}$.

次に，C_1 に含まれる語 w について，その末尾が 1 であるから，その直前の文字，つまり $n+1$ 番目の文字は 0 でなければならない．従って，任意の $w \in C_1$ について

$$w = x^\frown 1 = v^\frown 01$$

をみたす $x \in W_{n+1}$, $v \in W_n$ なる x, v が存在する．先程と同様に W_n から C_1 への写像 g を

$$g(x) = x^\frown 01$$

によって定義すれば，この g も全単射であることが容易に示される．よって $\sharp C_1 = \sharp W_n = G_n$ が成り立つ．

これで帰納関係式が成り立つことが証明された． ■

これで，gapsets の個数 G_n を生成する漸化式が導かれた．$G_0 = 1 = f_2$, $G_1 = 2 = f_3$ であるから，一般に

$$G_n = f_{n+2} = \frac{\gamma_+^{n+2} - \gamma_-^{n+2}}{\sqrt{5}}$$

が成り立ち，すべて解決した ... で終ったのでは，その辺にコロガッている「練習問題」だか「演習問題」だか「実戦問題」だか知らないが，要するにオベンキョーの数学と同じである．

実存的認知とオベンキョーとの違いは，**三ム主義**の有無にある．ここで三ム主義とは**ムリ**，**ムチャ**，**ムダ**を意味する．**ムリな詰め込み**，**ムチャな目標**，**ムダな努力**が我々の知を形作る．これに対する真正面からのアンチテーゼが，ゆとりと自分探しとみんななかよし，Social Network Service である ... すべて，「この国の現在」の代名詞ですね ...

2.3 Circular Gap Subsets

次に，2 つの整数の隣接を mod n で考えた場合の，巡回的隣接関係 N^* による c-gapset の考察に入ろう．$(n]$ に包まれる c-gapsets の総数を K_n で表わすことにした．Gapsets の総数を G_n としたので，c-gapset の総数も C_n にしたいところなのだが，こちらは Catalan Number というこれまた有名な整数列のほぼ固有名詞になっている．ちょっと使いにくい．"circle" に当たる Deutch が "Kreis" なので，K_n としたまでである．

今度も，小さな n について，circular gap subset を探すことから始めてみよう．

Table3 Circular Gap Subsets

n	K_n	$(n]$	c gapsets
1	1	$\{1\}$	$\emptyset$
2	3	$\{1,2\}$	$\emptyset, \{1\}, \{2\}$
3	4	$\{1,2,3\}$	$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}$
4	7	$\{1,2,3,4\}$	$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,3\}, \{2,4\}$
5	11	$\{1,2,3,4,5\}$	$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{3,5\}$

この Table 3 から直ちに見て取ることができるように，$(n]$ に包まれる c-gapsets の総数は，先ほど挙げた Lucas 数と一致している．従って，やはり帰納関係式 $K_{n+2} =$

$K_{n+1}+K_n$ をみたすはずである．この帰納関係式を証明するために，やはり memword への encoding が極めて大きな力を発揮する．c-gapsets を encoding してできる語を **c-gapwords** と呼び，$(n]$ の長さ n の c-gapwords すべてからなる集合を W_n^* で表わす．これにより，$n = 6$ までの c-gapwords は次の Table 4 (p.9) のようになる．

Table4 c-gapsets の encoding

n	K_n	W_n^*
1	1	0
2	3	00, 10, 01
3	4	000, 100, 010 / 001
4	7	0000, 1000, 0100, 0010 / 0001, 0101, 1010
5	11	00000, 10000, 01000, 00100, 00010, 01010, 10100 / 00001, 01001, 00101, 10010
6	18	000000, 100000, 010000, 001000, 000100, 010100, 101000, 000010, 010010, 001010, 100100 / 000001, 010001, 001001, 000101, 100010, 101010, 010101

今度も，W_n^* の欄で，slash “/” の前と後 ($n = 5, 6$ の場合は行を分けた) で区別をしてある．$n \geq 3$ のとき，W_n^* の/ よりも前に記されている memword は 1 行前にある W_{n-1}^* の末尾に 0 を連接してできる語である．これは明らかであろう．語 w が長さ $n-1$ の c-gapword であるならば，長さ n の語 w⌢0 はやはり $(n]$ のある c-gapset の encode であるからである．

それに対して，/ よりも後ろに並んでいる memword については，通常の隣接関係で考えた gapset の場合よりも，多少困難を伴なう (少なくとも筆者 `kymst` にはそうであった . . .)．以下，この Tables 3, 4 を参照しながら，次を証明しよう：

THEOREM 2.2 (Circular Gap Subsets の総数 K_n)

$(n]$ に包まれる c-gap subsets の総数 K_n は帰納関係式

$$K_{n+2} = K_{n+1} + K_n$$

をみたす．$K_1 = 1, K_2 = 3$ であるから，列 (K_n) は Lucas 数列 (l_n) に一致する．

Proof.

W_n^* と W_{n+1}^* から，実際に W_{n+2}^* に含まれる語を作る手順を考える．

(i) 長さ $n+1$ の c-gapword の末尾に 0 を連接するとき，長さ $n+2$ の c-gapword ができる．これは，$(n+1]$ の c-gapset は $(n+2]$ の c-gapset でもあることに対応する．つまり $(n+1]$ の c-gapset はそのまま $(n+2]$ に引き継がれる．この W_{n+1}^* から W_{n+2}^* への写像を f とすれば，明らかに f は単射である：

$$W_{n+1}^* \ni x \xmapsto{f} w = x^\frown 0 \in W_{n+2}^*.$$

(ii) 長さ n の c-gapwords の集合 W_n^* を次の 2 つに類別する：

- 末尾が 0 であるものの集合 S_0 : $S_0 = \left\{ v \in W_n^* \,\middle|\, \exists x \in W_{n-1}^* : v = x^\frown 0 \right\}$

- 末尾が 1 であるものの集合 S_1 : $S_1 = \{v \in W_n^* \mid \exists x \in W_{n-1}^* : v = x\frown 1\}$.

S_0 に含まれる語の先頭は 0 と 1 のいずれでもあり得るが，S_1 に含まれる語については，c-gapword である以上，先頭が 0 でなければならないことに注意せよ．

W_n^* から W_{n+2}^* への写像 g を次のように定義する：

$$W_n^* \ni v \xmapsto{g} w = \begin{cases} 0\frown v\frown 1, & \text{if } v \in S_0, \\ 1\frown v\frown 0, & \text{if } v \in S_1. \end{cases}$$

この写像 g により，S_0 に含まれる長さ n の語 $v = x\frown 0$ は 0 と 1 に挟まれて，長さ $n+2$ の語 $0\frown v\frown 1 = 0\frown x\frown 01$ になる．例えば，[5] での c-gapset $\{1,4\}$ は $v = 10010$ をその memword にもつが，$g(v) = 0100101$ であるから，$\{2,5,7\}$ は [7] の c-gapset になる．

他方，S_1 に含まれる長さ n の語 $v = x\frown 1$ はその先頭は 0 でなければならない：$v = 0\frown y\frown 1$ (ここで x は長さ $n-1$ の，また y は長さ $n-2$ の，c-gapword である)．このとき，v は g により $g(v) = 1\frown v\frown 0 = 10\frown y\frown 10$ に移る．$v = 0\frown y\frown 1$ が長さ n の c-gapword である以上，$g(v) = 1\frown v\frown 0$ はもちろん長さ $n+2$ の c-gapword である．これも具体例を与えておこう．[5] での c-gapset $\{2,5\}$ に対応する c-gapword は $v = 01001$ をもつから，$w = g(v) = 1010010$ となり，これは [7] の c-gapset $\{1,3,6\}$ を表わす．

この g が，やはり W_n^* から W_{n+2}^* への単射であることは明らかである．

後は f による W_{n+1}^* の像と，g による W_n^* の像が集合として互いに素である (つまり共通部分をもたない) ことが言えれば，

$$K_{n+2} = \sharp W_{n+2}^* = \sharp W_{n+1}^* + \sharp W_n^* = K_{n+1} + K_n$$

の証明は完了する．

- まず，f による W_{n+1}^* の像 $f\left(W_{n+1}^*\right)$ と，g による $S_0 \subseteq W_n^*$ の像 $g(S_0)$ とは，末尾がそれぞれ 0 と 1 になるから，互いに素である．
- また，W_n^* の類別 S_0，S_1 の g による像 $g(S_0)$ と $g(S_1)$ も，写像 g の定義からやはり互いに素である．
- 残っているのは，いずれも末尾が 0 である c-gapword の集合としての $f\left(W_{n+1}^*\right)$ と $g(S_1)$ が共通な要素をもたないことの確認である．ところがこれも，次のようにして明らかである．
  まず，$w \in f\left(W_{n+1}^*\right)$ について，その末尾の 0 を取り去れば，つまり f^{-1} を作用させれば，f の定義から $f^{-1}(w) \in W_{n+1}^*$ である．それに対して，$w \in g(S_1)$ から末尾の 0 を取り去ってできる語は，g の定義から先頭も 1 であり，また S_1 に含まれていたことから末尾にも 1 をもつ語になる．これは，長さが $n+1$ の，c-gapword ではない語である．従って，これら 2 つも共通部分をもたないことが了解される．

これと，f と g それぞれが単射であることを合わせて，

$$f(W_{n+1}^*) \cup g(W_n^*) = W_{n+2}^* \wedge f(W_{n+1}^*) \cap g(W_n^*) = \emptyset,$$

つまり

$$W_{n+2}^* = f\left(W_{n+1}^*\right) \uplus g\left(W_n^*\right)$$

が示された．よって c-gapset の総数 K_n について，示すべき帰納関係が成り立つ．(K_n) が Lucas 数列 (l_n) に一致することについては，証明すべきことはない． ■

2.4 Notes by `kymst`.

この § で扱った Gapsubsets や Circular Gapsubsets, gapword などの用語は，すべて筆者 `kymst` の造語である (捏造と言ってもよい).

筆者は，Claude Berge の著作 [Ber68a]

Principes de Combinatoire. Dunod, Paris，1968.

から着想を得た．English Edition [Ber68b] の

Principles of Combinatorics. Academic Press, 1971.

(訳者の特定がないので，Berge 自身による rewrite かもしれない) や，日本語訳の

C. ベルジュ「組合せ論の基礎」野崎 昭弘 訳，サイエンス社，1973(1989)

もある ([ベル 89]). `kymst` は Française の原著の `djvu` file を web 上で入手した (2011/07/01) が，今 (Mon Aug 06 10:48:54 2012 JST/) は見付からないようである．英訳と日本語訳については，古書店の世話になった．こうして名著が失なわれていくのも，この国の今を物語っているように思えるのは `kymst` だけではあるまい．閑話休題.

C. Berge (1926-2002) は France の数学者で，位相幾何や組み合わせ論，Graph Theory などで優れた結果を残した．特に，組合せ論を現代化した功績は高く評価されている．English Edition の Foreword で，もう一世代後の大物数学者，Gian-Carlo Rota は次のように言う [Ber68b, pp.vii-viii]：

> ... Two Frenchmen have played a major role in the renaissance of combinatorics: Berge and Schützenberger. Berge has been the more prolific writer, and his books have carried the word farther and more effectively than anyone anywhere. I recall the pleasure of reading the disparate examples in his first book, which made it impossible to forget the material. Soon after that reading, I would be one of many who unknotted themselves from the tentacles of the Continuum and joined the then Rebel Army of the Discrete.

組合せ論のルネッサンス，連続体の軛からの解放，離散的数学の反乱パルチザン，...... この言葉に血湧き肉躍るのは，筆者 `kymst` の，口にするのが憚られる前歴のせいばかりではあるまい (と言っても，連続体上の解析学そのものにも憧憬をもっている．関数空間を生きる解析学徒よ，怒らないで欲しい).

Berge については，

`http://serge.mehl.free.fr/chrono/Berge.html`

を参照されたい．Euler graph の解説も載っているが，残念ながら (?) Française である．また，

`http://users.encs.concordia.ca/~chvatal/perfect/claude2.pdf`

に Văsek Chvátal という人の追悼文がある.

ただし，筆者が刺激され着想を得たのは，あくまでも $G_n = f_{n+2}$，および $K_n = l_n$ という結論についてである．帰納関係式 $G_{n+2} = G_{n+1} + G_n$，$K_{n+2} = K_{n+1} + K_n$ は

Berge の書籍には言及されていない．特に，Theorem 2.1 (p.7), Theorem 2.2 (p.9) の証明については，これといって参考にした文献はない．Original ではあるが，Originality を主張する積りはない．またまた何百，何千，何万回目の車輪の大発見であることは知っている．逆にまた，もし誤りや不十分さがあれば，それは `kymst` 一人の責任である．

従って，原著との異同をはっきりとさせておくべきだと思う．主要な点は次である：

- 前述したように，gap subset, circular gapset, memword, gapword という語は捏造である．
- Gap subsets の総数 G_n を Berge は F_n で表わし，これをそのまま les nombres de Fibonacci ([Ber68a, p.27], [Ber68b, p.31], [ベル 89, p.28]) と呼ぶ．この場合，$F_1 = 2$, $F_2 = 3$ が初期条件となる．それ故，本論考では 普通我々が言う Fibonacci 列， つまり $1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$， を (f_n) として混同を避けた．
- Circular Gap Subsets の総数 K_n を Berge は F_n^* で表わし，それを *nombres de Fibonacci corrigés* ([Ber68a, p.27]) と呼ぶ．Eng. Trans. では *corrected Fibonacci number* ([Ber68b, p.32])，日本語訳では「修正 Fibonacci 数」([ベル 89, p.29]) となっている．c-gapwords の集合を W_n^* と表わしたのは，この upperscript の $*$ を踏襲しようとしたことによる．また，Berge には Lucas 数への言及はない．
- Berge はこれらの列を，ほとんど 2 項係数の和に還元する．その意味では，この論考における筆者の方向とは正反対である．むしろ，Berge が論じているのは，次の § で扱われる話題，つまり Theorems 2.1 (p.7)，2.2 (p.9) から得られる系 (Corollary) に当たる．

3 Some Corollaries

まず，circular でない方の gapset から，その個数の計算式を作ろう．$n \in \mathbb{Z}^+$ を固定して，$(n]$ に含まれる gapsets の個数を n によって表わすことが目標である．実はチットモ難しくない．どちらかと言うと，筆者 `kymst` よりも多くの読者の方がやり慣れているのではないか，と思われるような手法である．その通り，かの世紀の難問，「男子生徒 5 人と女子生徒 3 人を，女子が隣り合わないように並べる並べ方は何通りあるか.」というドーデモイージャン問題に対して，パブロフのワンチャンさえ驚くほどの早業で，大脳皮質に刺激が到達する以前に，脊髄条件反射によって反応して手が動き，◯ ◯ ◯ ◯ ◯ を描く．そしてその後，次の Theorem を用いたこともあると思う：

THEOREM 3.1 (ぱぶろふのわんちゃん定理)

あとはごこのまるのあいだについたてさんぼんいれるだけだけどおんなのこさんにんってくべつあるのかなまぁにんげんだからじゅんれつでいいよねはじっこもおっけーぽいからろくぴーさんでひゃくにじゅっとおりはいつぎいやまずいおとこのこだってくべつあるらしいからおとこのこのならびかたもかんがえるんだねだからごのかいじょうでひゃくにじゅうだからでかいなおいにんげんてくべつしなけりゃいけないのかなだれでもいいじゃんこたえはいちまんよんせんよんひゃくはいつぎ．

Proof.

殺意が走る程，すばらしい数学的な思考方法である．ただし，人権上の問題が残るが ... 個体の同一性と同値性，と言ってもよい． ■

3.1 Pavlov's ... NO! NO! Pascal's Triangle

...... などというザレゴトはいいとして，$(n]$ 上の gapsets の個数を求めよう．$S \subset (n]$ が k 個の要素からなる gapset であるとしよう．$(n]$ 上の，k 個の要素からなる gapsets の個数を $f(n, k)$ とする．S の memword は，1 を k 個含み，かつその 1 が隣接しないような，長さ n の binary string である．その個数は，諸君得意の「**スキマツイタテ論法**」で求めることができる．そのココロは，$n-k$ 個の 0 を並べ，その両端または間隔に k 個の 1 を割り込ませることで得られるから，個数 $f(n, k)$ は

$$f(n, k) = \binom{n-k+1}{k}$$

である．一般に，$i, j \in \mathbb{N}$ について 2 項係数 $\binom{i}{j}$ は $i < j$ のときにはすべて 0 であるから，この $f(n, k) = \binom{n-k+1}{k}$ の $k \in \mathbb{N}$ に渡る和を求めれば，$(n]$ に含まれる gapwords の総数，つまり gapsets の個数 G_n を求めることができる：

$$G_n = \sum_{k \in \mathbb{N}} f(n, k) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \binom{n-k+1}{k}. \tag{3}$$

この計算式 (3) において，加えられる 2 項係数の上 index と下 index の和が定数 $n+1$ であること，つまり，$i, j \in \mathbb{N}$, $j \leq i$ として，(3) は次の (4) に書きかえられることが重要である：

$$G_n = \sum_{i+j=n+1} \binom{i}{j} \tag{4}$$

さてでは，上下の index の和が一定であるような 2 項係数が並んでいるのは何か？ ...... その通り，**Pascal の算術 3 角形**である． *Pascal's Arithmetical Triangle*

もちろん，Pascal's Triangle については，すべての読者がご存知のことと思うが，Table 5 を見られたい．

この Pascal's Triangle において，左下から右上に向かう成分を結んでできる直線を**上昇対角線**と呼ぶ．右側の図では，これらを点線で描いた．上昇対角線を上から順に $d_1, d_2, \ldots$ と呼び，d_n 上の並ぶ 2 項係数の和を s_n とすれば *rising diagonal*

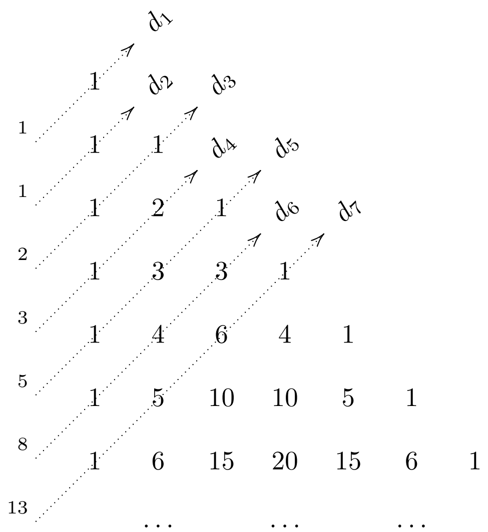
$$\begin{aligned}
s_1 &= \tbinom{0}{0} = 1, & s_2 &= \tbinom{1}{0} = 1, \\
s_3 &= \tbinom{2}{0} + \tbinom{1}{1} = 2, & s_4 &= \tbinom{3}{0} + \tbinom{2}{1} = 3, \\
s_5 &= \tbinom{4}{0} + \tbinom{3}{1} + \tbinom{2}{2} = 5, & s_6 &= \tbinom{5}{0} + \tbinom{4}{1} + \tbinom{3}{2} = 8, \\
&\cdots & &\cdots
\end{aligned}$$

一般に，上昇対角線 d_{n+1} 上に並ぶ 2 項係数の和 s_{n+1} は

$$s_{n+1} = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \ldots + \binom{\lceil n/2 \rceil}{\lfloor n/2 \rfloor} = \sum_{\substack{i+j=n \\ j \leq i}} \binom{i}{j} \tag{5}$$

Table5 Pascal Triangle

$$
\begin{array}{llllll}
\binom{0}{0} & & & & & \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & & \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & & \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & & \\
\binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} \\
 & \cdots & \cdots & & &
\end{array}
$$



となる．ここで，$x \in \mathbb{R}$ について，$\lceil x \rceil$ は x を下回らない最大の整数 (ceil of x) を，また $\lfloor x \rfloor$ は x を越えない最大の整数 (floor of x) を，表わす．

上昇対角線の起点に，その上に並ぶ成分の和を，少し小さく記入してある．これらは Fibonacci 数に他ならない．

我々は既に，$G_n = f_{n+2}$ を知っている．これと (4)，(5) とから，次が成り立つことが解った：

THEOREM 3.2 (Pascal's Triangle と Gapsets, Fibonacci)

$n \in \mathbb{N}$ の下で，Pascal's Triangle の上昇対角線 d_{n+2} に並ぶ 2 項係数の和 s_n は，$(n]$ に包まれる gapsubsets の総数 G_n に一致し，従ってそれは Fibonacci 数列の第 $n+2$ 項 f_{n+2} である：

$$s_{n+2} = G_n = f_{n+2}.$$

もちろん，$s_n = f_n$ という事実は多くの読者の知るところであろうし，その証明も見たりまたは自分で計算したりしたことがあると思う．その証明は次のようなものであったであろう：

Proof.

上昇対角線 d_k 上の 2 項係数の和を s_k で表わす．示すべきことは $s_n = f_n$ である．n に関する帰納法による．d_1, d_2 上の 2 項係数はいずれも 1 ただ 1 つだから，$s_1 = f_1 = 1$, $s_2 = f_2 = 1$ で成り立つ．

$n = k, k+1$ での成立を仮定する：

$$\text{(IH):} \qquad s_k = f_k, \quad s_{k+1} = f_{k+1}.$$

$n = k+2$ のとき，上昇対角線 d_{k+2} に並ぶ 2 項係数は

$$\binom{k+1}{0},\ \binom{k}{1},\ \binom{k-1}{2},\ \ldots,\ \binom{k-l+1}{l},\ \ldots$$

であり，$k - l + 1 < l \iff l > \frac{k+1}{2}$ のときはすべて 0 となる．従って，和は $l = 1$ から $h \overset{\text{def}}{=} \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor$ に渡る (h は「だいたい半分 (half)」の気持ちである)．

よって，第 $k+2$ 上昇対角線 d_{k+2} 上の 2 項係数の和 s_{k+2} は

$$s_{k+2} = \sum_{l=0}^{h} \binom{k-l+1}{l} = \binom{k+1}{0} + \binom{k}{1} + \binom{k-1}{2} + \ldots + \binom{k-l+1}{l} + \ldots + \binom{k-h+1}{h} \quad (6)$$

である．この第 2 項以降に，2 項係数の加法等式を用い，また第 1 項について $\binom{k+1}{0} = 1 = \binom{k}{0}$ を用いれば,

$$\begin{aligned} s_{k+2} = &\binom{k}{0} + \binom{k-1}{1} + \binom{k-1}{0} \\ &+ \binom{k-2}{2} + \binom{k-2}{1} \\ &\ \ldots \quad \ldots \\ &+ \binom{k-l}{l} + \binom{k-l}{l-1} \\ &\ \ldots \quad \ldots \\ &+ \binom{k-h}{h} + \binom{k-h}{h-1} \\ = &\sum \binom{k-l}{l} + \sum \binom{k-1-l}{l} = s_{k+1} + s_k \end{aligned}$$

となる．(IH) と合わせて，$s_{k+2} = f_{k+1} + f_k = f_{k+2}$ が示されたから，任意の $n \in \mathbb{Z}^+$ について定理の成立が言えた. ■

実際にこの証明は重要であり，ある意味では**ネラワレル**とも考えられるが，計算は計算である．Newton にしても Euler にしても，また Gauss にしても，定理 Theorema の後に証明 Demonstratio が続くのは当然であるが，その後に**考察** ***Scholium*** があることが多い.

現代人は多忙であると言われる．まして，この拙い document を目にしてくれている歳若き友人たちに至っては，その日常たるや老人の想像を絶するものがあるであろう．しかし......

「**示された，だからどうなのか?**」，この問を普段の我々はあまりに蔑ろにしていないか．この問題意識が，筆者をこの documentation に向かわせたと言ってもよい.

我々は，長さ n の gapwords について，2 つ目の直和分解に至ったことに気がついているだろうか．我々が得た Theorem 3.2 は，長さ n の gapwords を，それが含む 1 の個数に関して類別したときの直和分解についての命題である.

長さ n の gapwords の全体を $W_n = W$ とする．W の要素で，1 が現われないものの集合を W^0，1 が 1 回現われるものの集合を W^1，1 が 2 回現われるものの集合を W^2，...，一般に，1 の出現回数が k であるものの集合を W^k と表わす．これらはそれぞれ，空集合，単元集合，非順序対，...，k 個の要素からなる gap subsets に対応する．長さ n の gapwords である以上，1 の出現回数 k は $0 \leq k \leq \lfloor (n+1)/2 \rfloor$ である．この上限を h として $W = W_n$ は，これらの直和

$$W_n = W^0 \uplus W^1 \uplus W^2 \uplus \ldots \uplus W^h = \biguplus_{k=0}^{h} W^k \quad (7)$$

であり，$\sharp W^k = f(n, k) = \binom{n-k+1}{k}$ の 1 から $h = \lfloor (n+1)/2$ に渡る和こそが，(3) の意味なのではないか.

我々はまず最初に，長さ n の gapwords について，その末尾が 0 であるか 1 であるか，によって W_n の直和分解

$$W_n = C_0 \uplus C_1$$

を行ない，それから帰納関係 $G_{n+2} = G_{n+1} + G_n$ を得た (Theorem 2.1 (p.7))．その同じ集合 W_n が，もう 1 つの別構造の下に (7) の形に直和分解される．言ってみれば，これら 2 つの分解は，1 つの世界の重層的構造の表現なのではないか．それは，縦糸と横糸の織り成す網状組織に喩えられよう．ここに，世界の構造把握としての代数学が，最も原初的な姿の内に懐胎しているのを見るのは，筆者だけではなかろう．

これが，数学の巨人たちの行なった「考察」Scholium とは比ぶべくもないが，「示された，だからどうなのか?」に対する筆者の答えである．

3.2 G_n と K_n の関係

我々は既に

$$G_n = f_{n+2}, \quad K_n = l_n$$

という関係を知っている．これと，G_n, K_n の帰納関係

$$G_{n+2} = G_{n+1} + G_n, \quad K_{n+2} = K_{n+1} + K_n$$

とから，Fibonacci / Lucas 列 (f_n), (l_n) の間に成り立つ重要な関係式を導くことができる．一般に，語 w の長さを $\mathrm{lgh}(w)$ で表わす．

THEOREM 3.3 (Fibonacci 列と Lucas 列の関係 (1))

(f_n), (l_n) をそれぞれ Fibonacci 列，Lucas 列とするとき，次が成り立つ：

$$G_n + G_{n+2} = K_{n+3}, \quad i.e. \quad f_n + f_{n+2} = l_{n+1}. \tag{8}$$

Proof.

長さ $n+3$ の c-gapwords の集合 W^*_{n+3} を，末尾が 0 であるか 1 であるかで類別し，末尾が 0 である語からなる集合を C_0，1 である語からなる集合を C_1 とする：

$$C_0 = \left\{ w \in W^*_{n+3} \,\middle|\, \exists x : w = x^\frown 0 \wedge \mathrm{lgh}(x) = n+2 \right\},$$
$$C_1 = \left\{ w \in W^*_{n+3} \,\middle|\, \exists x : w = x^\frown 1 \wedge \mathrm{lgh}(x) = n+2 \right\}.$$

C_0 の要素 $w = x^\frown 0$ について，長さ $n+2$ の語 x は gapword であり，$x \in W_{n+2}$ である．逆に，任意の $x \in W_{n+2}$ の末尾に 0 を連接すれば長さ $n+3$ の c-gapword が得られる．よって W_{n+2} から C_0 への全単射 $g(x) = x^\frown 0$ が存在し，$\sharp C_0 = \sharp W_{n+2} = G_{n+2}$ が成り立つ．

次に，$w = x^\frown 1 \in W^*_{n+3}$ について，w が c-gapword である以上，その先頭は 0 でなければならず，また末尾から 2 番目，つまり末尾の 1 の直前は 0 でなければならない：

$$w = x^\frown 1 = 0^\frown v^\frown 01.$$

ここで v は $\mathrm{lgh}(v) = n$ であり，かつ gapword W_n の要素である．逆に，W_n の任意の語 v から $0^\frown v^\frown 01$ を作れば長さ $n+3$ の c-gapword を得る．よって $h(v) = 0^\frown v^\frown 01$ は W_n から C_1 への全単射となるから，$\sharp C_1 = \sharp W_n = G_n$.

よって，長さ $n+3$ の c-gapwords の集合 W^*_{n+3} と，その要素の個数 K_{n+3} について

$$K_{n+3} = \sharp W^*_{n+3} = \sharp(C_0 \uplus C_1) = \sharp C_0 + \sharp C_1 = \sharp W_{n+2} + \sharp W_n = G_{n+2} + G_n$$

が成り立つ．$K_{n+3} = l_{n+3}$，$G_{n+2} = f_{n+4}$，$G_n = f_{n+2}$ であるから $l_{n+3} = f_{n+4} + f_{n+2}$ となり，index を下げて $l_{n+1} = f_{n+2} + f_n$ が成り立つ． ■

Corollary 3.4

$$K_n = l_n = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k}.$$

Proof.

c-gapword $w \in W_n^*$ が含む 1 の個数に着目し，W_n^* の要素で k 個の 1 を含む語の個数を $f^*(n, k)$ と表わす．このような gapword の内で，末尾が 0 であるものの集合を C_0^k，1 であるものの集合を C_1^k とする．

C_0^k の要素は $w = x^\frown 0$ という形の語であり，x は 1 を k 個含む長さ $n-1$ の gapword であるから，その個数は $f(n-1, k) = \binom{n-k}{k}$ である．

C_1^k の要素 w は先頭が 0 であり，また末尾の 1 の直前は 0 でなければならないから，$w = 0^\frown v^\frown 01$ という形の語であり，v は長さ $n-3$ で，1 を $k-1$ 個含んでいる gapword である．よってその個数は $f(n-3, k-1) = \binom{n-k-1}{k-1}$ である．

これらの和として，1 を k 個含む c-gapwords の個数は (和の第 2 項に吸収等式を用いて)

$$f^*(n,k) = \binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1} = \binom{n-k}{k} + \frac{k}{n-k}\binom{n-k}{k} = \frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k}$$

となる．従って，長さ n の c-gapwords の総数 K_n は，この $\mathbb{N}$ に渡る和として

$$K_n = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k}.$$

■

THEOREM 3.5 (Fibonacci 列と Lucas 列の関係 (2))

Fibonacci 列 (f_n)，Lucas 列 (l_n) について

$$K_n + K_{n+2} = 5G_{n-1}, \quad i.e. \quad l_n + l_{n+2} = 5f_{n+1}.$$

Proof.

$K_{n+1} + K_{n+3} = 5G_n$ を示す．長さ $n+3$ の c-gapword の集合 W_{n+3}^* を，次のように類別する： $w \in W_{n+3}^*$ について

i) $w = 0^\frown x^\frown 00$,

ii) $w = 0^\frown x^\frown 01$,

iii) $w = 0^\frown x^\frown 10$,

iv) $w = 1^\frown x^\frown 00$,

v) $w = 0^\frown x^\frown 10$.

いずれについても，$\mathrm{lgh}(x) = n$ である．これらをみたす c-gapwords の集合をそれぞれ $T_1, T_2, \ldots, T_5$ とすれば，W_{n+3}^* はこれらの直和に分解される：

$$W_{n+3}^* = T_1 \uplus T_2 \uplus \ldots \uplus T_5.$$

それぞれの要素の個数について，次が成り立つ：

- i) と ii) について，語 x は $\mathrm{lgh}(x) = n$ の gapword であるから，
  $\sharp T_1 = \sharp T_2 = G_n$.
- iii) の x は末尾が 0 であるような gapword である：$x = v^\frown 0$ において，v は $\mathrm{lgh}(v) = n-1$ なる gapword であるから，その個数は $\sharp T_3 = G_{n-1}$.
- iv) の x は先頭が 0 であるような gapword である：$x = 0^\frown v$ において，v は $\mathrm{lgh}(v) = n-1$ なる gapword であるから，その個数は $\sharp T_4 = G_{n-1}$.
- v) については，x は両端が 0 であるような gapword である．$x = 0^\frown u^\frown 0$ において，u は $\mathrm{lgh}(u) = n-2$ をみたす gapword であるから，その個数は $\sharp T_5 = G_{n-2}$.

これらの和として，長さ $n+3$ の c-gapwords の総数 K_{n+3} は

$$\begin{aligned} K_{n+3} &= 2G_n + 2G_{n-1} + G_{n-2} \\ &= 2G_n + G_{n-1} + (G_{n-1} + G_{n-2}) \\ &= 2G_n + G_{n-1} + G_n = 3G_n + G_{n-1} \end{aligned}$$

が成り立つ．W^*_{n+1} についても同様にして

$$K_{n+1} = 3G_{n-2} + G_{n-3}$$

であるから，この和として

$$\begin{aligned} K_{n+3} + K_{n+1} &= 3G_n + G_{n-1} + 3G_{n-2} + G_{n-3} \\ &= 3G_n + G_{n-1} + 2G_{n-2} + (G_{n-2} + G_{n-3}) \\ &= 3G_n + G_{n-1} + 2G_{n-2} + G_{n-1} \\ &= 3G_n + 2(G_{n-1} + G_{n-2}) \\ &= 3G_n + 2G_n = 5G_n. \end{aligned}$$

よって，index を下げて $K_{k+2} + K_n = 5G_{n-1}$ であるから，定理に言う通りである．$K_n = l_n$，$G_n = f_{n+2}$ であるから，$l_n + l_{n+2} = 5f_{n+1}$ が成り立つ． ■

4 Appendix — Inplementation on Computer

Sorry, Not Yet Written!

Index

adjacent relation, 5

binary set, 2
binary string, 3

c-capword, 8
c-gapset, 5
characteristic function, 3
circular gap subset, 5
circular neighbourhood relation, 5
concatenate, 6
concatenation, 6

decoding, 3
direct sum, 7

empty string, 6
encoding, 3

Fibonacci Sequence, 3

gap subset, 5
gapset, 5
gapword, 6

Lucas sequence, 3
Lucas, F.E.A. (1842-1891), 4

membership relation, 3
memword, 3

neighbourhood relation, 5

Pascal's Arithmetical Triangle, 13
power set, 2

rising diagonal, 13

帰属関係, 3
gapsubset, 5

空の列, 6

巡回的 gap subset, 5
巡回的隣接関係, 5
上昇対角線, 13

スキマツイタテ論法, 13

直和, 7

特性関数, 3

2 値集合, 2
2 値文字列, 3

Pascal の算術 3 角形, 13

Fibonacchi 数列, 3
復号化, 3
符号化, 3

べき集合, 2

Lucas 数列, 3
隣接関係, 5

連接, 6
連接する, 6

References

[Ber68a] Claude Berge. *Principes de Combinatoire.* Dunod, Paris, 1968.

[Ber68b] Claude Berge. *Principles of Combinatorics.*, Vol. 72 of *Mathematics in Science and Engineering.* Academic Press, New York, 1968.

[Luc78] Edouard Lucas. Théorie des fonctions numériques simplement périodiques. *The American Journal of Mathematics*, Vol. 1, 1878. pp.184-240, 289-321.

[Luc69] Edouard Lucas. *The Theory of Simply Periodic Numerical Functions.* Fibonacci Association, 1969. Translated from French by Sidney Kravitz. Edited by Douglas Lind. `http://www.mathstat.dal.ca/Fibonacci/`.

[ベル 89] ベルジュ, C. 組合せ論の基礎. サイエンスライブラリ 数学, No. 9. サイエンス社, 1973(1989). 野崎 昭弘 訳.