SAGe 2016 セミナープラン

SAGe 2016 members

2016 年 5 月 22 日

新しく SAGe のセミナーを始めるにあたり, 上級生でいくつかセミナープランの候補を挙げた. 本文書はそれをまとめ, 大学新入生にも意味が分かるよう, 分野の紹介も兼ねてテキストの紹介をしたものである. SAGe で行うセミナーには様々な専攻の学生が集まるため, 専門的な内容を扱いにくい側面があるが, 一方で様々な視点から物事を捉えられる好機ともいえる. 本セミナーは多くの大学新入生にとって初めてのセミナーとなるであろうから, 困難も多いと思う[*1]. どうか, 自分が (現時点で) 熱意を持って取り組みたいと思えるようなトピックを探してみて欲しい.

(序文, 編集担当: 早稲田大学基幹理工学部数学科 4 年 杉ノ内萌)

1　電磁気学 / ベクトル解析 (Electromagnetics / Vector Analysis)

推薦書: D.J.Griffiths. *Introduction to Electrodynamics*. 3rd edition. Prentice Hall, 1999.

この本は主題は Electrodynamics であり, “Introduction to” とあるように電磁気学を初めて学ぶ人を対象にしている. 電磁気学と聞くと高校の物理でやってきたようなことを想像するかもしれないが, それは半分だけ正しい. 大学で一般に電磁気学を記述する為にはその準備として, “ベクトル解析” という数学の道具が必要不可欠である. 空間に広がる電荷と, 場の性質である電場, 磁場の関係を表現する為には, 空間の各点で定義されるベクトル場を導入し, 自由に設定した経路や面上などで積分を実行できる必要がある. ベクトル解析の主な内容は微分演算子 (div, rot など) の導入, 線積分などの積分法, ベクトル解析の基本的な諸定理 (Gauss の発散定理や Stokes の定理など) である. この本は 1 章でベクトル解析の解説をし, 2 章以降で初めて電磁気学的なトピックが登場するという構成だ. 具体的には 2 章から 4 章で静電場, 5 章から 6 章で磁場, 7 章でマクスウェルの方程式, 8 章以降で電磁波や相対論での電磁気学など発展的なトピックスを扱う. 電磁気学の内容はいわゆるアンペールの法則やクーロンの法則といった馴染みのある直感的な法則を初めに提示し, そこからマクスウェルの方程式を導くという構成だ. この流れは初めて学ぶ人には最も適しているだろう. ただし, 電磁気学に慣れている人は逆の方向, マクスウェルの方程式から出発する本が美しく感じるかもしれない. この本は外国では一般的な電磁気学の教科書としても採用されているらしく, 確かに個人的にも解説が好印象である. 標準的な難易度で読みやすく, SI 単位系で記述され, 演習問題も豊富に取り揃えてあってセミナーには適しているとお勧めできる.

(文責: 東京大学工学部電気電子工学科 3 年 隅田圭)

[*1] セミナーのやり方についてはチューターを担当される隅田君や韮塚君から説明があると思うが, 1 年後に目指すべき理想像として http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/sem.htm を是非読んで頂きたい.

2 解析力学 (Analytical Mechanics)

高校で勉強してきた力学といえば, Newton の運動法則 (特に第二法則) で与えられる Newton の運動方程式 $ma = F$ と運動量保存やエネルギー保存を駆使して運動を理解するというのが主であったと思う. 解析力学では, Newton の力学法則を出発点とする理論を拡張して, Lagrange 形式, Hamilton 形式と呼ばれる力学の定式化をおこなう. この形式で原理として採用されるのは「最小作用の原理」と呼ばれるものである. 詳しい内容はここでは言及しないが, この定式化の良い点として一つには美しい理論体系であること, もう一つには実用的でもあることがあげられる*2.

Lagrange 形式は Lagrangian と呼ばれる関数を用いて理論を記述するが, この形式は量子力学や相対論にも拡張できるもので, 古典物理と現代物理の架け橋にもなっている.

Lagrange 形式における一つの山は Noether の定理である. この定理の主張するところは, 空間や時間の対称性と保存量が対応するというもので, 物理学全体を通じて大事な考え方である. SAGe で解析力学をやることになった場合はこれを学ぶことが一つの目標となるだろう.

SAGe で扱う解析力学の教科書として以下の 3 つを推薦したい.

1. J.R.Taylor. *Classical Mechanics*. Univerity Science Books, 2005.
   この本では第 1 章から第 6 章までは Newton の運動法則を出発点とした古典力学が展開され, 第 7, 8 章で Lagrange 形式の力学, 第 13 章で Hamilton 形式の力学が扱われている. 具体例も豊富に掲載されている.
2. J.M.Finn. *CLASSICAL MECHANICS*. Infinity Science Press, 2008.
   第 1 章で古典力学がまとめられており, 第 3 章以降で Lagrange 形式, Hamilton 形式の力学が展開される. この本でゼミを行う場合は第 4 章で示される Noether の定理を理解することが一つの目標となる. 第 2 章での数学的な準備のハードルは少々高いかも知れないが, 後々役に立つ内容を豊富に含んでいる.
3. V.I.Arnold. *Mathematical Methods of Clasical Mechanics*. GTM 60. Springer, 1989.
   本書は第一部では Newton 力学, 第二部では Lagrange 形式の力学, 第三部では Hamilton 形式の力学が議論される. できるだけ一般的な形式のもとで力学が展開され, 上の二冊と比べると数学の比重が大きい. 初学者にはハードルが高い反面, 力学という学問の数学的背景を深く学ぶことができるのが本書の特徴である.

解析力学を学ぶにあたって必要な数学的知識は多変数の微積分学, 基本的な常微分方程式などが挙げられるが, 少なからず教科書の中で説明されており, もし不足している部分があっても適宜補足しながら勉強を進めていくことができると思われる.

(文責: 早稲田大学先進理工学部物理学科 4 年 杉浦健一)

*2 実用的な点の一つを具体例として挙げておくと, Lagrange 形式において Newton 方程式に代わる運動方程式 (Euler-Lagrange 方程式と呼ばれる) は座標の取り方に依存しない方程式となっている. この点は Newton 方程式を極座標で書き直した場合, 方程式の形が大きく変わってしまうことと比較すると大きな利点であることがわかる.

3　代数 (Algebra)

推薦書: M.A.Armstrong. *Groups and Symmetry.* UTM. Springer, 1988.

現代数学において群という概念はなくてはならないものである．群は足し算や掛け算といった演算についての性質を調べる, いわゆる代数学だけではなく, 幾何学や解析などの分野においても利用されており, 物理学でも量子力学などに利用されている．群という概念はそれほど数学の総体の中に, 空気のように溶け込んでしまっている重要な概念の一つである．

本書では, 群というものを立体と模様の対称性を計る計器として紹介している．ここで対称性とは, 中学や高校でやったような図形の線対称や点対称そのものの性質だと考えてもらって構わない．本書を使ったゼミの大きな流れとしては, 具体的な立体や模様の対称性を使って抽象的な群の性質や諸定理を理解し, 目標として群の分類を行う Sylow の定理を示すことになると思われる．

(文責: 東京理科大学理学部第二部数学科 2 年 韮塚凌平)

4　常微分方程式 / 力学系 (Ordinary Differential Equation / Dynamical System)

力学系とは, 時間発展するものの振る舞いを調べる数学である．その時間発展は連続的なものもあれば, 離散的なものもある．例えば, 実数の離散的な時間発展は数列となる．このように, 力学系の扱う対象は非常に広く, それゆえ歴史も深い[*3]．ここでは常微分方程式から定まる力学系についてと, 離散力学系とそのカオスについて紹介したい．

常微分方程式はまず, 局所的に一意解を得ることができる．この定理は逐次近似のような古典的な方法で証明できるが, Banach の不動点定理のような関数解析的手法に昇華させることができるなど, このような古典的証明技術を勉強することは先の勉強で非常に役に立つ．次に, 常微分方程式は局所的に解けるのであるから, その局所的な時間発展を定義することが出来る．それは常微分方程式の定義領域の上で定義され, 流れ (flow) と呼ばれる．この flow を 相空間 (phase space) と呼ばれる空間で捉えることで, 常微分方程式を非常に幾何学的な見地で捉えることができる．これらの視点を身につけることは非常に有用であり, さらに, これらの視点を学ぶこと自体に意味があるように思える．これらの事柄について詳細に記した書物は多いが, 昨年度読んだ [7] には, これらの事柄が多くの例と共に, 非常に生き生きと描かれている．また, 局所的に捉えられた解 (または flow) の大域的な振る舞いを調べるというトピックも面白いと思う．これらは [3] の後半を参考にしつつ, 力学系の教科書 (たとえば [8] など) で学ぶことができる．ところで, 特殊な微分方程式について考察を深めることも面白い．例えば, Hamilton 系という常微分方程式の解についての考察を深めることにより, 非常に豊かな数学が展開されることが知られている[*4]．これについては [2] や [6] に詳しく記述されており, どちらも新入生が学ぶ意義のある良いテキストである．

[*3] 力学系の歴史については [4] などを見られたい．大雑把な問題意識をより知りたい方には, [1] をおすすめする．ついでに注意しておくが, ここで述べる力学系は純数学的に考えるものばかりである．現実問題に対する応用数理としても非常に深い理論はあり, たとえば epsilon でも前回の石川さんの講演内容 (`http://kymst.net/index.php?GrpE%2FAleph2016` でレビューとスライドが見れます.) はその例となっていると思う．

[*4] 古くには, これは天体力学が生まれた頃にまで遡る．この当時の様子を生き生きと描いた文献として [8] を挙げておく．現在でも Hamilton 系についての研究は様々な見地から非常に活発であると言えるであろう．

上で述べたように, 連続的な力学系は古くから調べられ, 非常に豊かな数学が展開されていた. しかし, 時代が進むに連れ, 計算機の発達などに伴って, 人類は離散的な力学系を本格的に研究するようになった. その際に発見された初期値に対する鋭敏性という現象はカオスと呼ばれるものの 1 つであり, 現代でも分からないことが多い. このような発展途上とも言えるカオス力学系であるが, 前提知識は 1 変数の微分積分だけで勉強できるなど, 高度な数学を使わずに勉強できることから, 今回のセミナーでは最適なトピックなのではないかと思われる. 本としては [5] があり, 1 章の最後には, カオスの火付け役の 1 つであるとされる記念碑的論文 *Period Three Implies Chaos* に挑戦できる良書である[*5]. 必要に応じて計算機の練習もできると思われ, 多くの分野が交差する SAGe のセミナーには格好の教材なのではないかと思う. SAGe で過去に力学系を扱ったことはないが, この機会に是非とも挑戦してもらいたい.

参考文献

[1] 荒井迅. 力学系の歴史と動機. 2009. (第 1 回 JST さきがけ数学塾. http://www.jst.go.jp/crest/math/ja/suugakujuku/suugakujuku.html よりダウンロード可能.)

[2] 伊藤秀一. 常微分方程式と解析力学. 共立講座 21 世紀の数学 11. 共立出版, 1998.

[3] 笠原皓司. 微分方程式の基礎. 数理科学ライブラリー. 朝倉書店, 1982.

[4] 白岩謙一. 力学系の発展について. 数学 Vol.38, No.1, p.71-80. 1986. (https://www.jstage.jst.go.jp/article/sugaku1947/38/1/38_1_71/_article/-char/ja/ からダウンロードできる.)

[5] K.T.Alligood, T.D.Sauer and J.A.Yorke. *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*. Springer, 1999.

[6] V.I.Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Second Edition. GTM 60, Springer, 1989.

[7] V.I.Arnold. *Ordinary Differential Equations*, English Translation. Springer, 1992

[8] F.Diacu and P.Holmes. *Celestial Encounters: The Origins of Chaos and Stability*. Princeton University Press, 1996. (日本語訳あり. 天体力学のパイオニアたち 上, 下. 吉田春夫訳. 丸善出版.)

[8] M.W.Hirsch, S.Smale and R.L.Devaney. *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*, Third Edition. Academic Press, 2012.

(文責: 早稲田大学基幹理工学部数学科 4 年 杉ノ内萌)

[*5] 論文と言っているが, 使う数学の中で最も難しい定理は中間値の定理だけである.