回転と鏡映 — 正 2 面体群 D_n —
Rotations and Reflexions
— Dihedral Groups D_n —

YAMASHITA, Koichiro *

Mon Oct 28 11:52:21 2013 JST

My Teachers and Friends

From left to right:

- Emacs Gnu *Catoblepas gnu Emacs* (`http://www.gnu.org/graphics/`)
- TEXLion *Felis leo TEX* (`http://www.ctan.org/tex-archive/`)
- Lisp Alien *??? ??? Lisp* (`http://www.lisperati.com/`)

This document is ML^3`docu No.20131028groupth.`
Key Words: Group. Dihedral. Matrix. Orthogonal.

url: `http://kymst.net`
mail to: `kymstkymst@gmail.com`
We hope your math exciting, your hack happy,
and whole lotta love. `:-)`

Abstract

最近のことだが，「**正 6 角形を自分自身に移すような線形変換をすべて決定せよ**」という問題に接する機会を得た．と言っても，肝心要のその部分は「改題」のせいで，問題自体から削除されていた．画竜点睛を欠くどころではない，チャーシューメンチャーシューを欠く，カツドントンカツを欠く，チーズバーガーチーズもハンバーグも欠く，人の生き様で言えば，一宿一飯の恩義さえ忘れ去る所業である．

もちろん，その辺の XXXX の XXXX に決まっているので，original に当たってみた．original を調べることをしなかったら，話は極めて中途半端なものになったであろう．調べてくれた T.,S. 氏に感謝する．ただし，何故核心部分が省かれることになったのか，その経緯については相変らず不明である．理由，ないし編集方針としての意図があるのなら，浅学非才の身として教えを乞いたい．

それはいいとして (全然よくないのだが，それは置いておいて)，この問題は，多くの pre-university students の学んでいる数学が，次の step に飛躍するための jumping board として極めて重要である．これこそが，シミッタレタ高校数学が数学本来の姿へと換骨奪胎する起爆剤である．それは**数学の抽象性の具現化**と言えよう．具象 (concrete) と抽象 (abstract) は，この問題に現われるような営みを通じて結び付く．こうした営みのないところに数学はない．ヒカラビタ，パサツイタ，どれを見ても代わり映えのない「演習問題」のコナシが残るだけだ．

その営みとは，具象の中に抽象的構造を見出し，逆にその抽象的構造を新たな数学的対象の内に具象化する，という，双方向性をもつ「やり取り」である．正多角形を自分自身に重ねる，という，小学生でも解るこ

* Group ML^3 (Mathematics, of the Learner, for the Learner, by the Learner.), & FMFk(Free Math Forum by `kymst`)

の内容に，線形変換の内で最も重要な部分がすべて含まれている．そしてそれは，幾何学的変換としてだけではなく，そこに隠された代数的構造をも暴き出す．その代数的構造こそ，直交群 $\mathrm{O}(2)$ と特殊直交群 $\mathrm{SO}(2)$ でありまた正 2 面体群 D_n である．そしてそれは，ある 3 角行列の作る群とも「同一」である．

もう一度言う．脱落した幻の (2) にこそ，そして以下で「捏造」される (3) にこそ，pre-univ. students の全数学は結晶するのだ．

エッ，(2) とか (3) とか言われても解らん!? ......そりゃそうですね．

コトの発端は次でした．ただし，vocabulary は変えてあります．

> 座標平面上の，原点を中心とし，$(1, 0)$ を 1 つの頂点にもつ正 6 角形 $\mathscr{H}$ がある．$\mathscr{H}$ をそれ自身に重ねる線形変換について，
> (1) $(1, 0)$ を動かさない線形変換の表現行列を求めよ．
> (2) $\mathscr{H}$ を $\mathscr{H}$ に移す線形変換の表現行列をすべて求めよ．
> (3) (2) で求めた線形変換からなる集合を正 2 面体群 D_6 と言う．D_6 の代数的構造について考察せよ．

Contents

1　平面における回転と鏡映

次の定理は明らかであろうが，回転の方はいいとしても，特に鏡映についてアヤシイ場面を目にすることがあるので確認しておく：

Theorem 1.1　**回転，鏡映を表わす行列**
点 O を原点とする座標平面において，$\mathrm{P}\,(x,\,y)$ を原点を中心として θ 回転して得られる点 $\mathrm{Q}\,(\overline{x},\,\overline{y})$ は

$$\begin{pmatrix}\overline{x}\\ \overline{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix},\quad i.e.\quad \boldsymbol{q}=\boldsymbol{R}_\theta\boldsymbol{p} \tag{1}$$

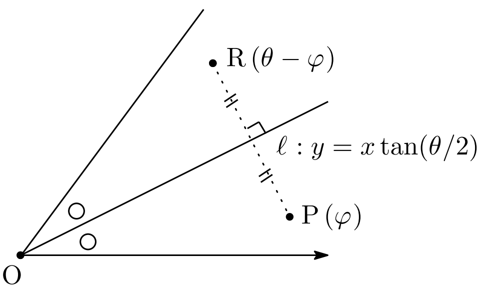
である．ここで $\mathrm{P}\,(\boldsymbol{p})$，$\mathrm{Q}\,(\boldsymbol{q})$ とした．また，このように (1) の θ 回転を表わす行列を $\boldsymbol{R}_\theta$ と書く (**R**otation)．
　また，原点 O を通る直線 $y=x\tan(\theta/2)$ を ℓ とするとき，点 $\mathrm{P}\,(x,\,y)$ を ℓ について鏡映で移した点 $\mathrm{R}\,(\overline{x},\,\overline{y})$ は

$$\begin{pmatrix}\overline{x}\\ \overline{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix},\quad i.e.\quad \boldsymbol{r}=\boldsymbol{M}_\theta\boldsymbol{p} \tag{2}$$

である．$\mathrm{R}\,(\boldsymbol{r})$ については先ほどと同様である．また，(2) の鏡映変換を表わす行列を $\boldsymbol{M}_\theta$ と表わす (**M**irror)．鏡映対象の軸が x 軸正方向となす角は $\theta/2$ であって，θ ではない．更に，$\tan(\pi/2)=\infty$ と定め，$y=\infty x$ は y 軸 $x=0$ のことであると約束する．

Proof.　鏡映についてのみ証明しておく．特に P が単位円 $\mathscr{U}$ 上にある場合を示せば十分である．

Fig.1　鏡映



　$\mathscr{U}$ 上の点は原点からその点への vector の偏角 (x 軸正方向となす角) により一意的に定まるから，$\mathrm{P}\,(\varphi)$ とする．このとき，鏡映の軸の偏角が $\theta/2$ であることから，P と ℓ に関して鏡映対称な点 R の偏角は $\theta-\varphi$ となる．ここで

$$\begin{pmatrix}\cos(\theta-\varphi)\\ \sin(\theta-\varphi)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta\cos\varphi+\sin\theta\sin\varphi\\ \sin\theta\cos\varphi-\cos\theta\sin\varphi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}$$

であるから，$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{M}_\theta\boldsymbol{p}$ が成り立つ．■

　これから直ちに，次の Corollary が導かれる：

Corollary 1.2 x 軸に関する鏡映変換を表わす行列を $\boldsymbol{J}$ とすれば，$\boldsymbol{M}_\theta=\boldsymbol{R}_\theta\boldsymbol{J}$ である．

Proof.　x 軸鏡映は $\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ で表わされるから，

$$\boldsymbol{R}_\theta\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}=\boldsymbol{M}_\theta.\quad ■$$

　この Corollary によって，任意の鏡映変換は，原点を中心とする回転，及び x 軸に関する鏡映によって表わされることが解った．

2 行列の転置と直交行列

2 次の正方行列に話を限定する．実数を成分とする 2 次正方行列の全体を $M_2(\mathbb{R})$ で表わし，$\boldsymbol{X} \in M_2(\mathbb{R})$ について，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ を列 vector として $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{y})$ と見なす．$\boldsymbol{x} = \binom{x_1}{x_2}$ について，これを行 vector に直した $(x_1\,x_2)$ を列 vector $\boldsymbol{x}$ の**転置 vector** (*transposed vector*) と言い，${}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ と表わす．$\boldsymbol{y}$ についても同様である：$\boldsymbol{y} = \binom{y_1}{y_2}$ ならば ${}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = (y_1\,y_2)$.

2 つの列 vector $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ について，「横に寝かされた」${}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ と ${}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$ を「縦に積んで」得られる行列

$$\begin{pmatrix} {}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ {}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_1\,x_2) \\ (y_1\,y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$$

を行列 $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{y})$ の**転置行列** (*transposed matrix*) と言い，${}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}$ で表わす．$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$ ならば，

$${}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} = {}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} = {}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} {}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ {}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$$

である．

2 つの行列 $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \in M_2(\mathbb{R})$ について，${}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{X}\boldsymbol{Y}) = {}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}$ であること，また ${}^{\mathrm{T}}({}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}$ であることは，容易に確かめることができる[*1].

この「行列の転置」によって，直交行列という極めて重要な概念を得る：

Definition 2.1 直交行列
$\boldsymbol{I}$ を $M_2(\mathbb{R})$ の単位行列とする．$\boldsymbol{X} \in M_2(\mathbb{R})$ が

$${}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{I}, \quad i.e. \quad {}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}^{-1} \tag{3}$$

をみたすとき，$\boldsymbol{X}$ を (2 次の) **直交行列** (*orthogonal matrix*) と言う．

以下では，2 つの vector $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{w}$ の内積を $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle$ で表わす[*2]．$\boldsymbol{v} = \binom{v_1}{v_2}$, $\boldsymbol{w} = \binom{w_1}{w_2}$ としたとき，

$$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = ({}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v})\boldsymbol{w}, \quad i.e. \quad \left\langle \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \right\rangle = (v_1\,v_2)\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

であることに注意して欲しい．左辺は vector の内積，右辺は行列の積である．

次の定理が成り立つ：

Theorem 2.1 直交行列と内積
直交行列は，vector の内積を保存する：$\boldsymbol{X}$ が直交行列であるとする．このき，vector $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^2$ について，

$$\langle \boldsymbol{X}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{X}\boldsymbol{w} \rangle = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle$$

が成り立つ．

Proof. 左辺の内積を行列の積に書き換えれば，${}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{I}$ より

$$\langle \boldsymbol{X}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{X}\boldsymbol{w} \rangle = {}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{X}\boldsymbol{v})\boldsymbol{X}\boldsymbol{w} = ({}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X})\boldsymbol{X}\boldsymbol{w} = {}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}({}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\boldsymbol{X})\boldsymbol{w} = {}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}\boldsymbol{w} = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle. \quad \blacksquare$$

内積が保存されるなら，2 点の間の距離，つまり vector の長さも保存されることに注意せよ：

$$|\boldsymbol{X}\boldsymbol{v}|^2 = \langle \boldsymbol{X}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{X}\boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle = |\boldsymbol{v}|^2$$

[*1] 数学の Document で「容易に確かめることができる」とは，「安心せずに確かめよ」，「確かめるのはソッチだよ」という意味である．
[*2] 内積を点表記 $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}$ でしか表わさないことも，この国の高校数学特有の貧弱さである．もちろん，***Dot*** *product* とは内積のことであるから，点表記を使うな，と言っているわけではない．しかし，1 行の，あるいは 1 列の行列として vector を扱う必要が生じた途端に，点表記だけでは融通が効かなくなる．点 $\cdot$ は，乗法全体の補助記号であるべきなのではないか．. . . あっ，そうか．だから高校生に行列教えるの止めるんだ．さすが閔侮禍愕省! 配慮が行き届いてますね．

だからである．Euclid 空間 E から E 自身への写像 $T: E \to E$ が全単射であり，かつ 2 点間の距離を不変に保つとき，その写像 T を**合同変換** (*congruence Transformation*) と言う．E における合同変換は，Theorem 1.1 (p.3) で述べられた回転と鏡映，および**並進** (*translation*) の 3 種類しかない．

並進，つまり平行移動はある vector $\boldsymbol{b}$ を加えることによって表わされるから，$\boldsymbol{M}$ を回転または鏡映変換の表現行列とすれば，合同変換 $T: \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{y}$ は

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$$

によって表わされる．一般に，ある行列 $\boldsymbol{A}$ と vector $\boldsymbol{b}$ によって変換 T が $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ と表わされ，かつ T が正則であるとき，この変換 T を **affine 変換** (affine transformation) と言う．そして特に，この定 vector $\boldsymbol{b}$ が zero vector $\boldsymbol{o}$ であるとき，つまり T が $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ によって表わされるときが**線形変換** (*linear transformation*) である[*3]．

実数を成分とする 2 次の正方行列 $M_2(\mathbb{R})$ の内で，**正則** (*regular*) なもの，つまり $\det \boldsymbol{X} \neq 0$ をみたすような $\boldsymbol{X} \in M_2(\mathbb{R})$，からなる集合を ($\mathbb{R}$ 上 2 次の) **一般線形群** (*general linear group*) と言い，$\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ と表わす．更に $\det \boldsymbol{X} = 1$ をみたすような $\boldsymbol{X} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ からなる集合を ($\mathbb{R}$ 上 2 次の) **特殊線形群** (*special linear group*) と言い，$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ で表わす．

「**群**」(*group*) という語が多用されているが，その意味は次節で定義するので，今のところは「ある種の集まり」くらいの意味で考えておいて支障はない．

直交行列を $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ 上で考える．つまり，成分が実数で ${}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{I}$ をみたすものすべてを考えよう，というわけである．このような行列全体の集合を**直交群** (*orthogonal group*) と言い，$\mathrm{O}(2)$ と表わす．更に，$\mathrm{O}(2)$ の内で行列式の値が 1 であるものを**特殊直交群** (*special orthogonal group*) と言い，$\mathrm{SO}(2)$ と表わす:

$$\begin{aligned} \mathrm{O}(2) &\overset{\mathrm{def}}{=} \left\{ \boldsymbol{X} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \,\middle|\, {}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{I} \right\}, \\ \mathrm{SO}(2) &\overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{O}(2) \cap \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Theorem 2.2　**特殊直交群と回転行列**
xy 平面における原点中心の θ 回転を表わす回転行列を $\boldsymbol{R}_\theta$ とする．このとき，次が成り立つ：

(i) $\mathrm{SO}(2) = \left\{ \boldsymbol{R}_\theta \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \,\middle|\, \theta \in \mathbb{R} \right\}$.
(ii) $g \in \mathrm{O}(2)$ ならば，$\det g = \pm 1$.

Proof.　$\mathrm{SO}(2)$ の要素を $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とすると，${}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ である．${}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{I}$ より

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{pmatrix}$$

であるから，

$$a^2 + c^2 = 1, \quad b^2 + d^2 = 1, \quad ab + cd = 0$$

である．$\boldsymbol{X} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ より，ある $\theta \in \mathbb{R}$ について $a = \cos\theta,\ c = \sin\theta$ が成り立つ．$\boldsymbol{X} \in \mathrm{SO}(2)$ であるから $\det \boldsymbol{X} = ad - bc = 1$ となる．これと $ab - cd = 0$ を b, d に関する連立方程式 $\left(\begin{smallmatrix} a & c \\ -c & a \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} b \\ d \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ と見なして，Cramer's Rule により

$$b = \frac{\left|\begin{smallmatrix} 0 & c \\ 1 & a \end{smallmatrix}\right|}{\left|\begin{smallmatrix} a & c \\ -c & a \end{smallmatrix}\right|} = -c = -\sin\theta, \quad d = \frac{\left|\begin{smallmatrix} a & 0 \\ -c & 1 \end{smallmatrix}\right|}{\left|\begin{smallmatrix} a & c \\ -c & a \end{smallmatrix}\right|} = a = \cos\theta$$

であるから，$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \boldsymbol{R}_\theta$ となり，確かに $\boldsymbol{X} \in \mathrm{SO}(2)$ は回転行列である．逆に，どんな回転行列 $\boldsymbol{R}_\theta$ についても，その逆行列 ${\boldsymbol{R}_\theta}^{-1}$ は

$${\boldsymbol{R}_\theta}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = {}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_\theta, \quad \det \boldsymbol{R}_\theta^{-1} = 1$$

であるから，行列式の値が 1 の直交行列である．よって特殊直交群 $\mathrm{SO}(2)$ とすべての回転行列からなる集合は一致する．これで前半が示された．

[*3] 概念として，**線形とは正比例のことである**．だからこそ，行列とはまったく異なる分野と思われているかもしれない解析学，微分積分学の，正比例，つまり線形作用としての微分 $\mathrm{d}y = A\,\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}z = A\,\mathrm{d}x + B\,\mathrm{d}y$ と融合することをもって，初等数学としての諸君の数学は次の phase に転移する可能性をもち得るのだ．ナンデモカンデモ「1 次変換」では話が通じなくなるのもアタリ前であろう．あ，そーか．もう来年からこういう心配もなくなるんだ．

成熟することを忘れた大人による教育は，愚鈍学生との蜜月を夢見る．ゆとり教育は**痴呆国家による若年者への差別**に他ならぬ．**行列を学んでいない理系というのは，この国以外では形容矛盾である．**

後半について，$\boldsymbol{X} \in \mathrm{O}(2)$ とすると，${}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{I}$ である．この行列式を考えると，その乗法性によって

$$1 = \det \boldsymbol{I} = \det({}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}) = \det {}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} \cdot \det \boldsymbol{X}$$

である．ところが $\det {}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} = \det \boldsymbol{X}$ であるから，

$$(\det \boldsymbol{X})^2 = 1, \quad \therefore \det \boldsymbol{X} = \pm 1$$

となる．■

もちろん，SO(2) は O(2) の要素の内で，行列式の値が 1 であるようなものからなる部分集合である．そして Theorem 2.2 から，それは回転変換を表わす行列 $\boldsymbol{R}_\theta$ の全体と一致した．では，直交群 O(2) の要素で，SO(2) には含まれないもの，つまり集合論的差 $\mathrm{O}(2)\backslash\mathrm{SO}(2)$ は何であろうか．

そう，その通り，これが直線 $y = x\tan(\theta/2)$ についての鏡映変換を表わす行列 $\boldsymbol{M}_\theta$ からなる全体に他ならない：

$$\mathrm{O}(2)\backslash\mathrm{SO}(2) = \left\{ \boldsymbol{M}_\theta \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \,\middle|\, \theta \in \mathbb{R} \right\}.$$

とりあえず，この集合を M で表わそう．SO(2) と M は全単射 f で移り合うことを我々は既に知っている．Corollary 1.2 (p.3) を思い出そう．

$$\mathrm{SO}(2) \ni \boldsymbol{R}_\theta \overset{f}{\longmapsto} \boldsymbol{M}_\theta = \boldsymbol{R}_\theta \boldsymbol{J} \in M, \quad \boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

だからである．SO(2) と M とは，いずれも O(2) の部分集合であるが，単にそれだけではなく，O(2) の**類別** (*classification*) になっていることに注意しよう．つまり，全体としての直交群 O(2) は，**モレナクダブリナク**，2 つの**同値類** (*equivalent class*) 特殊直交群 SO(2) と鏡映行列の集合 M に分かれ，かつそれらは全単射で移り合うのである．

このようなとき，O(2) は SO(2) と M の**直和** (*disjoint union*) である，あるいは SO(2) と M とは O(2) の**直和分割** (*disjoint decomposition*) である，と言われる．つまり

$$\mathrm{SO}(2) \cup M = \mathrm{O}(2), \quad \mathrm{SO}(2) \cap M = \emptyset$$

が成り立つことである．整数 $\mathbb{Z}$ が偶数と奇数の直和に分解されるのと，極めて類比的であることに注意して欲しい．つまり $\mathbb{Z}$ 上の加法を $\bmod 2$ で考えるのと同じである．

こうして我々は次の定理を得たことになる：

Theorem 2.3 合同線形変換

平面上の図形の合同性を保存する線形変換の表現行列は直交群 O(2) に一致する．直交群 O(2) は回転変換の表現行列としての特殊直交群 SO(2) と鏡映変換の表現行列の集合 $M = \mathrm{O}(2)\backslash\mathrm{SO}(2)$ の直和に類別される．このとき，写像 f を $\mathrm{SO}(2) \ni \boldsymbol{R}_\theta \overset{f}{\longmapsto} \boldsymbol{R}_\theta \boldsymbol{J} = \boldsymbol{M}_\theta \in M$ と定めれば，SO(2) と M は全単射 f で対応する．

3 群について

先ほども述べたように，以下の考察では「群」という概念が中心を占める．この拙い document の title 自身，正 2 面体**群**である．現代の数学の中核をなす概念である．ここで，多少のことを学んでおくのも無駄ではあるまい (......というのは，ガラにもない謙遜である．学知の下に生きる覚悟を決めた pre-univ. には，ここで述べる程度の数学的見識は絶対に必要だと思っている)．

ある集合 G があり，G のどの 2 つの要素にも G の第 3 の要素を対応させる 2 変数の写像 φ が定義されているとする：

$$\forall x, y \in G, \exists z \in G : \varphi(x, y) = z.$$

ここで，φ が写像であることにより，z の一意性は保証されていることに注意．つまり z はただ 1 つ存在する．このような 2 変数の写像 φ を，**2 項演算** (*binary operation*) と言い，$\varphi(x, y)$ を通常は $x * y$ とか $x + y$, $x \cdot y$，あるいは xy と表わす．このように，ある集合 S と，その要素の間に定義された演算 $*$ を組にして考えるとき，その対 $(S, *)$ を**代数系** (*algebraic system*) と言う．

群とは次の G0 から G3 をみたす代数系である：

Definition 3.1 群 (*Group*)

G を空でない集合とし，G 上に演算 $*$ が定義されているとする．代数系 $(G, *)$ が次の公理をみたすとき，$G = (G, *)$ を**群** (*group*) と言う：

G0. 集合 G は演算 $*$ について閉じている (**閉包性 (*closure*)**) : $\forall x, y \in G : x * y \in G$.
G1. 演算 $*$ は**結合的** (*associative*) である : $\forall x, y, z \in G : (xy)z = x(yz)$.
G2. G には**単位元** (*identity element*) と呼ばれる要素 e が存在して，$\forall x \in G : ex = xe = x$ が成り立つ.
G3. 任意の $x \in G$ についてそれぞれ $y \in G$ が存在して，$xy = yx = e$ が成り立つ : $\forall x \in G \exists y \in G : xy = yx = e$.
この y を x の**逆元** (*inverse element*) と言い，x^{-1} と表わす.

この G0 から G3 を**群の公理** (*axioms of group*) と言う.

群 G の演算 $*$ が更に**可換** (*commutative*) でもあるとき，つまり $\forall x, y \in G : x * y = y * x$ が成り立つとき，$G = (G, *)$ を**可換群** (*commutative group*)，あるいは **abel 群** (*abelian group*) と言う．一般に，群 G において，演算結果 $x * y$ を「x と y の積」と言う．この場合には単位元を 1 で表わすことが多い．それに対して G が可換群であるときには，演算結果を「x と y の和」と言う．可換群の場合には，演算を $+$ で表わすことが多いからである．またこのとき，単位元は 0 で表わされる．

いくつかの異なる群を同時に考える必要がある場合には，$G = (G, *_G), H = (H, *_H)$ などとして演算を区別することがある．それに応じて，単位元も e_G, e_H と書かれる．

Definition 3.2 位数
G が群であるとき，その要素の個数を群 G の**位数** (*order*) と言い，$|G|$ で表わす．位数が有限のとき，その群を**有限群** (*finite group*) と言い，そうでないとき**無限群** (*infinite group*) と言う．

群の公理 G0 から G3 のみから導かれる命題は，すべての群について成り立つ．つまり，ある集合 S を相手にしているとき，その集合 S が，群の公理 G0 から G3 をみたすことさえ確かめれば，そうした命題はすべてその集合について成り立つはずである．そのような，群一般についての代表的な性質を挙げておこう：

Theorem 3.1 簡約律 (*law of reduction*)
群 G の任意の元 x, y, z について次が成り立つ：

(i) $xy = xz$ ならば $y = z$，$xz = yz$ ならば $x = y$ である．
(ii) $xy = z$ ならば $x = zy^{-1}$, $y = x^{-1}z$ である．

Proof.

(i) G3 により x の逆元 x^{-1} が存在する．それを左から乗じて第 1 の結論を得る．第 2 についても z^{-1} を右から乗じて成立．
(ii) それぞれ右から y^{-1}，左から x^{-1} を乗じて成立．■

Theorem 3.2 G が群であるとき，次が成り立つ：

(i) G の単位元は一意に定まる．
(ii) G の要素の逆元は，それぞれ一意に定まる．
(iii) $x, y \in G$ について $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$.
(iv) $x \in G$ について $\left(x^{-1}\right)^{-1} = x$.

Proof.

(i) e_1, e_2 がいずれも G の単位元であるとすると，$e_1 = e_1e_2 = e_2$ である．最初の等号は e_2 が単位元であるかとから，後の等号は e_1 が単位元であることから，従う．
(ii) $x \in G$ が y_1, y_2 を逆元にもつとする．このとき $y_1x = xy_2 = e$ であるから，$y_1 = y_1(xy_2) = (y_1x)y_2 = y_2$ となる．結合性 G1 が用いられていることに注意せよ．
(iii) $(xy)(y^{-1}x^{-1}) = x(yy^-1)x^{-1} = xex^{-1} = xx^{-1} = e$ である．$(y^{-1}x^{-1})xy$ についても同様．
(iv) $x^{-1} = y$ とすると，$xy = yx = e$ であるから $x = y^{-1} = (x^{-1})^{-1}$ となる．■

群 G の要素 x について

$$x^0 = e, \quad \underbrace{xx \cdots x}_{n\,\text{factors}} = x^n, \quad x^{-n} = (x^n)^{-1}$$

と定める．

これまでに登場した「ナニナニ群」には次のものがあった：

- 実数 $\mathbb{R}$ 上の 2 次一般線形群 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$,
- 実数 $\mathbb{R}$ 上の 2 次特殊線形群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$,
- 2 次の直交群 $\mathrm{O}(2)$,
- 2 次の特殊直交群 $\mathrm{SO}(2)$.

これらが確かに群であること，つまり公理 G0 から G3 をみたすこと，を順に確認して見よう．

I. $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ とは，正則な 2 次正方行列すべてからなる集合であった．$\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ であれば，$\boldsymbol{XY} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ であるから，$\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ は乗法について閉じている (G0 の閉包性)．$\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ について，行列の乗法は結合的であるから $(\boldsymbol{XY})\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{YZ})$，つまり公理 G1 が成り立つ．
単位元は単位行列 $\boldsymbol{I}_2$ であり，$\boldsymbol{I}_2$ は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ に含まれるから G2 が成り立つ．また，任意の $\boldsymbol{X} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ について $\det \boldsymbol{X} \neq 0$ であるから逆行列 $\boldsymbol{X}^{-1}$ が存在し，G3 が成り立つ．
以上より，確かに一般線形群 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ は**群である**．

II. $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ とは，行列式の値が 1 であるような正方行列の集合であった．$\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ とすれば，$\det \boldsymbol{XY} = \det \boldsymbol{X} \cdot \det \boldsymbol{Y} = 1$ であるから，$\boldsymbol{XY} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ である．つまり $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ は乗法について閉包性をもつ (G0)．
G1(結合性) は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ と同様である．単位元については，単位行列 $\boldsymbol{I}_2$ について $\det \boldsymbol{I}_2 = 1$ であるから $\boldsymbol{I}_2 \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$，つまり G2 が成り立つ．$\boldsymbol{X} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ とその逆行列 $\boldsymbol{X}^{-1}$ について，
$$1 = \det \boldsymbol{I}_2 = \det \boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{-1} = \det \boldsymbol{X} \cdot \det \boldsymbol{X}^{-1} = \det \boldsymbol{X}^{-1}$$
であるから，$\boldsymbol{X}^{-1} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ となり，G3 も成り立つ．よって特殊線形群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ も**群である**．

III. 直交群 $\mathrm{O}(2)$ とは ${}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}^{-1}$ をみたすような $\boldsymbol{X} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ の要素の集合であった (正則であることは，直交性の定義から明らかである)．
   - まず，$\mathrm{O}(2)$ が行列の乗法について閉じていること (G0) を示す．$\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \in \mathrm{O}(2)$ とする．示すべきことは ${}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{XY}) = (\boldsymbol{XY})^{-1}$ であるが，これは ${}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{XY})(\boldsymbol{XY}) = \boldsymbol{I}$ と同値である．積の転置の性質より
   $${}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{XY})(\boldsymbol{XY}) = \left({}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}\,{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\right)(\boldsymbol{XY}) = {}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}\left({}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}\right)\boldsymbol{Y} = {}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}\boldsymbol{I}\boldsymbol{Y} = {}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{I}$$
   であるから，積 $\boldsymbol{XY} \in \mathrm{O}(2)$ が成り立ち，閉包性 G0 をみたす．
   - G1 の結合性については，行列の乗法が結合的であることから成立．
   - 単位行列 $\boldsymbol{I}$ は ${}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I} = \boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}^{-1}$ をみたし，$\boldsymbol{I} \in \mathrm{O}(2)$ より G2 も成立．
   - $\boldsymbol{X} \in \mathrm{O}(2)$ について，$\boldsymbol{X}^{-1} \in \mathrm{O}(2)$ を示す．${}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{I}$ であるから，
   $$\boldsymbol{I} = {}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I} = {}^{\mathrm{T}}\left({}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}\right) = {}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} \cdot {}^{\mathrm{T}}\left({}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\right) = \boldsymbol{X}^{-1}\,{}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{X}^{-1}\right).$$
   よって $\boldsymbol{X}^{-1}$ についても，その転置 ${}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{X}^{-1}\right)$ との積が単位行列 $\boldsymbol{I}$ となるから，$\boldsymbol{X}^{-1} \in \mathrm{O}(2)$．よって G3 が成立．

   以上より，$\mathrm{O}(2)$ が**群である**ことが示された．

IV. 特殊直交群 $\mathrm{SO}(2)$ とは $\mathrm{O}(2) \cap \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ であった．$\mathrm{O}(2)$ と $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ がそれぞれ G0 の閉包性をもつことから，$\mathrm{SO}(2)$ が G0 をみたすことは明らかである．結合性は行列の乗法から成り立ち，また単位元を含むことも明らかである．逆元についても，行列式の乗法性から $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ と同じである．よって G0 から G3 が成り立ち，$\mathrm{SO}(2)$ は**群である**．

4　直交群の内部構造

4.1　回転と鏡映の性質

さて，ここで直交群 $\mathrm{O}(2)$ の内部構造に立ち入ってみよう．抽象論として，これが群をなすことは解った．しかし，それで終ったのでは，$\mathrm{O}(2)$ という数学的対象について考察したことにはならない．$\mathrm{O}(2)$ がどのような群であるか? を考えよう．具体的には，$\mathrm{O}(2)$ の 2 つの要素 (行列) に乗法を施すとき，どのような性質が得られるか，である．

もちろん，$\mathrm{O}(2)$ の要素はすべて円関数 $\sin, \cos$ で表わされた成分をもつから，行列の積を求めればその結果を計算することができる．しかし，その計算のみに停まっていては，直交群 $\mathrm{O}(2)$ の代数構造は明らかになっては来ない．具体的対象――現在の我々にとっては，それは個々の 2 次正方行列――の実際の計算を背後で司る何か，もしそれがあるとしたら，それこそが我々が見出すべき真理であろう．この document の最初に述べた，人間の営為としての数学が為すべき，具象と抽象の双方向的やり取りである．

例えば，$\alpha, \beta, \ldots \in \mathbb{R}$ として行列
$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{M}_\alpha \boldsymbol{R}_\beta \boldsymbol{M}_\gamma \boldsymbol{R}_\delta \boldsymbol{R}_\varepsilon \boldsymbol{M}_\eta \boldsymbol{M}_\theta$$

によって表わされる変換はどのようなものか．

もしこれを，そのまま行列の積として求めるのが数学ならば，その数学は人間の数学ではない．忍耐力を養う人生修行にはなるかも知れないが，知的営みではなかろう．とは言え，そのような『数学』を時として目にすることもあるが，それは，筆者と，この拙い document を読み進めてくれている歳若き友人達の数学ではない．刺激と反応だけで数学をやったら，パブロフのわんちゃんが怒る，というものである．

我々はすでに直交群 O(2) が**群をなす**ことを知っている．その立場から，具体計算を見直して見よう．

$\theta, \varphi \in \mathbb{R}$ として，直交群 O(2) は行列

$$\boldsymbol{R}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{M}_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$$

を要素にもち，行列の乗法を演算にもつ群であった．その単位元は単位行列 $\boldsymbol{I}$ であり，また回転行列 $\boldsymbol{R}_\theta$ の逆元は $\boldsymbol{R}_\theta^{-1} = \boldsymbol{R}_{-\theta}$ であること，鏡映行列 $\boldsymbol{M}_\theta$ の逆元はそれ自身であること，は明らかである．θ 回転した後に $-\theta$ 回転すれば元に戻るし，同じ直線について 2 回鏡映変換を行なえば，やはり元に戻る．

ただこれだけの，当たり前の事実から次が示される：

Theorem 4.1 直交群 O(2) の内部構造

$\theta, \varphi \in \mathbb{R}$，また $\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ とする．O(2) の要素について，次が成り立つ：

(i) $\boldsymbol{R}_\theta \boldsymbol{R}_\varphi = \boldsymbol{R}_{\theta+\varphi}$;
(ii) $\boldsymbol{M}_\theta = \boldsymbol{R}_\theta \boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}\boldsymbol{R}_{-\theta}$;
(iii) $\boldsymbol{M}_\theta \boldsymbol{M}_\varphi = \boldsymbol{R}_{\theta-\varphi}$;
(iv) $\boldsymbol{R}_\theta \boldsymbol{M}_\varphi = \boldsymbol{M}_{\theta+\varphi}$;
(v) $\boldsymbol{M}_\theta \boldsymbol{R}_\varphi = \boldsymbol{M}_{\theta-\varphi}$.

Proof.

(i) 明らかに，φ 回転の後に θ 回転を行なうことは，$\theta+\varphi$ 回転を行なうことである．

(ii) 前半は Theorem 1.1 の Corollary 1.2 (p.3) である．後半については，$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{M}_\theta \boldsymbol{M}_\theta$, $\boldsymbol{J}^{-1} = \boldsymbol{J}$ に注意して

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{R}_\theta \boldsymbol{J} \boldsymbol{R}_\theta \boldsymbol{J} \iff \boldsymbol{J} = \boldsymbol{R}_\theta \boldsymbol{J} \boldsymbol{R}_\theta \iff \boldsymbol{J}\boldsymbol{R}_\theta^{-1} = \boldsymbol{R}_\theta \boldsymbol{J}$$

であるから，$\boldsymbol{M}_\theta = \boldsymbol{R}_\theta \boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}\boldsymbol{R}_{-\theta}$ となり成立．

(iii) (ii) より $\boldsymbol{M}_\theta = \boldsymbol{R}_\theta \boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{M}_\varphi = \boldsymbol{J}\boldsymbol{R}_{-\varphi}$ であるから，

$$\boldsymbol{M}_\theta \boldsymbol{M}_\varphi = \boldsymbol{R}_\theta \boldsymbol{J}\boldsymbol{J}\boldsymbol{R}_{-\varphi} = \boldsymbol{R}_\theta \boldsymbol{R}_{-\varphi} = \boldsymbol{R}_{\theta-\varphi}.$$

(iv) これも (ii) によって

$$\boldsymbol{R}_\theta \boldsymbol{M}_\varphi = \boldsymbol{R}_\theta \boldsymbol{R}_\varphi \boldsymbol{J} = \boldsymbol{R}_{\theta+\varphi} \boldsymbol{J} = \boldsymbol{M}_{\theta+\varphi}.$$

(v) 同様に

$$\boldsymbol{M}_\theta \boldsymbol{R}_\varphi = \boldsymbol{R}_\theta \boldsymbol{J} \boldsymbol{R}_\varphi = \boldsymbol{R}_\theta \boldsymbol{R}_{-\varphi} \boldsymbol{J} = \boldsymbol{R}_{\theta-\varphi}\boldsymbol{J} = \boldsymbol{M}_{\theta-\varphi}. \quad \blacksquare$$

群という代数的構造を視野に入れた具体的計算，というものがどうのようなものなのか，解ってもらえたであろうか．有意味な計算と無意味な計算，elegant な数学と ugly な数学があるのだ．ちなみに，上で挙げた行列 $\boldsymbol{A}$ は $\alpha-\beta-\gamma+\delta+\varepsilon+\eta-\theta$ 回転の表現行列である．確かめられたい．

4.2 複素数による表現

複素数平面 $\mathbb{C}$ において，上で得られた Theorem 4.1 がどのように表わされるか，を考えよう．原点を中心とする回転，および原点を通る直線に関する鏡映によって，$\mathbb{C}$ 上の点 P(z) が点 Q(w) に移るとき，$z, w \in \mathbb{C}$ の関係を導いてみる．そもそも，原点中心の回転は複素数平面 $\mathbb{C}$ の最も得意とするところである．$\arg zw = \arg z + \arg w$ であるからである．

以下では，極形式 $\cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta$ を $\mathrm{cis}\,\theta$ で表わす．これにより，偏角の関係と de Moivre Theorem は ($n \in \mathbb{Z}$ として)

$$\mathrm{cis}\,\theta \cdot \mathrm{cis}\,\varphi = \mathrm{cis}\,(\theta+\varphi), \quad (\mathrm{cis}\,\theta)^n = \mathrm{cis}\,n\theta$$

と書かれる[*4]．ここで，視点を拡げてみよう．2 つの複素数の積を，一方に他方を作用させること，と見なす．これにより，P(z) に対して原点中心の θ 回転を**作用させる**とは，z に $\mathrm{cis}\,\theta$ を乗じることである，と解釈される．このように考えるとき，$\mathrm{cis}\,\theta$ は $\mathbb{C}$ 上の**回転作用素** (*rotation operator*) ρ_θ であると言われる：

$$\mathbb{C} \ni z \xmapsto{\rho_\theta} w = z\mathrm{cis}\,\theta \in \mathbb{C}.$$

また，実軸 ($\mathbb{R}^2$ で言えば x 軸) についての鏡映対称点は複素共役によって表される．これは**鏡映作用素** (*mirroring operator*) μ に他ならない：

$$\mathbb{C} \ni z \xmapsto{\mu} w = \overline{z} \in \mathbb{C}.$$

このように考えることにより，4.1 で考察した行列 $\boldsymbol{R}_\theta$ は $\mathbb{C}$ 上の回転作用素 ρ_θ と，また $\boldsymbol{J}$ は鏡映作用素 μ と，構造的に全く同じ機能を果していることが解るであろう．一方は O(2) という 2 次正方行列の集合，他方は複素数平面 $\mathbb{C}$ 上の単位円周上の点と共役演算，モノは違っているのに同じ機能を果すこと，この観点にこそ，数学とは構造の探求である，という思想の萌芽がある[*5]．

この観点の下で，Theorem 4.1 (p.9) を複素数の言葉で言い換えてみよう．次になる：

Theorem 4.2　鏡映と回転の $\mathbb{C}$ における表現

$\mathbb{C}$ における原点中心の θ 回転の作用素を ρ_θ で，また直線 $\ell = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \arg z = \theta/2 \right\}$ による鏡映を μ_θ で表わすとき，次が成り立つ：

(i) $\rho_\theta \circ \rho_\varphi(z) = z\,\mathrm{cis}\,(\theta + \varphi)$;
(ii) $\mu_\theta(z) = \overline{z}\,\mathrm{cis}\,\theta$;
(iii) $\mu_\theta \circ \mu_\varphi(z) = z\,\mathrm{cis}\,(\theta - \varphi)$;
(iv) $\rho_\theta \circ \mu_\varphi(z) = \overline{z}\,\mathrm{cis}\,(\theta + \varphi)$;
(v) $\mu_\theta \circ \rho_\varphi(z) = \overline{z}\,\mathrm{cis}\,(\theta - \varphi)$.

Proof.

(i) 複素数の積における偏角の性質そのものである． $z \xmapsto{\rho_\varphi} z\,\mathrm{cis}\,\varphi \xmapsto{\rho_\theta} z\,\mathrm{cis}\,\varphi\,\mathrm{cis}\,\theta$ において，右辺は $z\,\mathrm{cis}\,(\theta + \varphi)$ となる．

(ii) $z = r\mathrm{cis}\,\zeta$ とする． $z \xmapsto{\mu_\theta} w$ とすると，$\arg w = \theta - \zeta$ であるから，

$$w = r\mathrm{cis}\,(\theta - \zeta) = r\mathrm{cis}\,(-\zeta) \cdot \mathrm{cis}\,\theta = \overline{z}\,\mathrm{cis}\,\theta.$$

(iii) $\mu_\theta \circ \mu_\varphi$ によって $z \xmapsto{\mu_\varphi} \overline{z}\,\mathrm{cis}\,\varphi \xmapsto{\mu_\theta} \overline{\overline{z}\,\mathrm{cis}\,\varphi}\,\mathrm{cis}\,\theta$ となる．この右辺は

$$\overline{\overline{z}\,\mathrm{cis}\,\varphi}\,\mathrm{cis}\,\theta = z\,\mathrm{cis}\,(-\varphi)\,\mathrm{cis}\,\theta = z\,\mathrm{cis}\,(\theta - \varphi).$$

(iv) $z \xmapsto{\mu_\varphi} \overline{z}\,\mathrm{cis}\,\varphi \xmapsto{\rho_\theta} \overline{z}\,\mathrm{cis}\,\varphi\,\mathrm{cis}\,\theta = \overline{z}\,\mathrm{cis}\,(\theta + \varphi)$.

(v) $z \xmapsto{\rho_\varphi} z\,\mathrm{cis}\,\varphi \xmapsto{\mu_\theta} \overline{z\,\mathrm{cis}\,\varphi}\,\mathrm{cis}\,\theta = \overline{z}\,\mathrm{cis}\,(-\varphi)\,\mathrm{cis}\,\theta = \overline{z}\,\mathrm{cis}\,(\theta - \varphi)$. ■

5　正 2 面体群 D_n Not Yet Completed, Sorry!

さて，前節までで，我々の主要な考察対象である正 2 面体群に進む準備が整った．正 6 角形を保存する合同線形変換全体のなす群を**正 2 面体群** D_6 (*dihedral group*) と呼ぶ．一般に，平面上の正 n 角形を保存するような合同線形変換を D_n で表わす．

以下では，まず具体例として D_3, D_4, D_5, D_6 を考え，それ以降，一般の D_n を考察し，更に D_∞ にまで視野を拡げる予定である……

[*4] 複素数平面については，筆者の小さな論考『数学は i にあふれて』(Math Jotter of `kymst`, New Series, No.A-6, 2011) を参照されたい．筆者の web page, “Free Math Forum by `kymst`” (`http://kymst.net/mjk`) で down load できる．

[*5] この観点を失なったのが，どこかの国の「行列と複素数平面の互換」指導要領である．次回は複素数平面は消えて行列が復活し，その次はまた取り換えて，……オシゴト，楽デイイデスネ．エライ御用数学者大先生．

......のだが ......先に片付けなばならない，重要案件が降ってきた．残念ではあるが，ここで中断することになる．Document の Title になっている正 2 面体群の考察に入ってもいないところで，筆者一身上の都合から執筆を投げ出すのは悔しいのだが，許して欲しい．

取り急ぎ，最初に Preface で触れた「脱落した幻の (2)」と「捏造された (3)」の決着だけ付けておこう．

正 6 角形 $\mathscr{H}$ の中心を O とし，頂点を反時計方向に 0 から 5 とする．図は Fig 2 (p.11) を参照されたい．

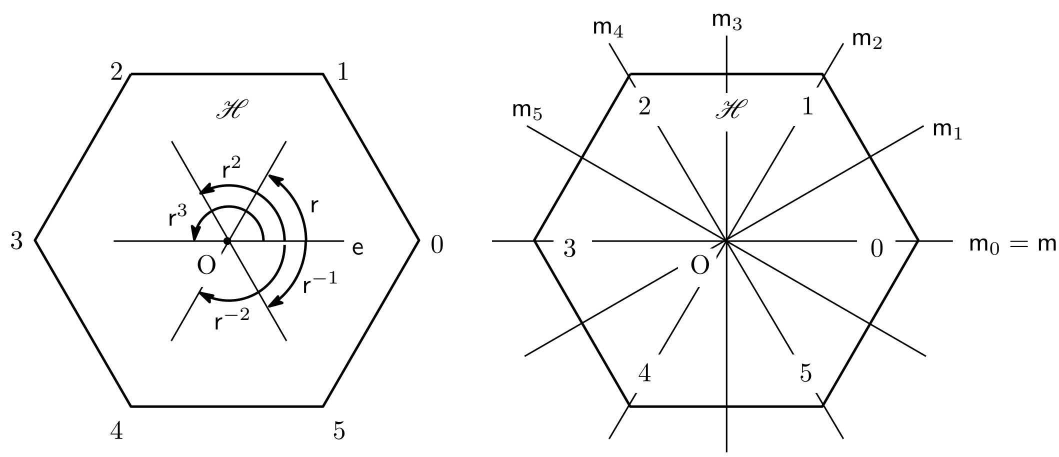
r で，中心 O の回りの $\frac{\pi}{3}$ 回転を表わし，$k \in \mathbb{Z}$ について r^k で $\frac{k\pi}{3}$ 回転を表わす．k を mod 6 で考えることにすれば，r^4 は r^{-2} とも書かれる．また，r^6 は正 6 角形 $\mathscr{H}$ のどの頂点も動かさないから，単位元と考えられるので $\mathsf{r}^6 = \mathsf{r}^0 = \mathsf{e}$ とする．

これらはすべて，§4 で考察した特殊直交群 SO(2) の要素であるから，回転行列により表現される．一般に r^k は $\boldsymbol{R}_{k\pi/3}$ であり，また $\mathsf{e} = \mathsf{r}^0$ は単位行列 $\boldsymbol{I}$ に他ならない．

これにより，$\mathscr{H}$ の回転対称は次の 6 個である：

$$\mathsf{e}(= \mathsf{r}^0),\ \mathsf{r}^1,\ \mathsf{r}^2,\ \mathsf{r}^3,\ \mathsf{r}^4,\ \mathsf{r}^5. \tag{4}$$

Fig.2 正 6 角形の回転と鏡映



また，$\mathscr{H}$ は 6 個の鏡映対称性をもつ．Figure 2 の右側の図を見られたい．向かい合う頂点どうしを結ぶ直線 3 本と，対辺の中点どうしを結ぶ直線 3 本に関する鏡映対称である．それらをそれぞれ m_0 から m_5 とした．これも直交群 O(2) に対応する行列をもつことは明らかであろう．例えば m_1 は直線 $y = x\tan\pi/6$ に関する鏡映であるから，その表現行列は $\boldsymbol{M}_{\pi/3}$ である．

ところが，我々は §1 の Corollary 1.2 (p.3)，および §4 の Theorem 4.1 (p.9) によって，この $\boldsymbol{M}_{\pi/3}$ について $\boldsymbol{M}_{\pi/3} = \boldsymbol{R}_{\pi/3}\boldsymbol{J}$ であることを知っている．ここで $\boldsymbol{J}$ は x 軸鏡映であった．ところが x 軸鏡映は正 6 角形 $\mathscr{H}$ における変換では $\mathsf{m} = \mathsf{m}_0$ であるから，結局鏡映 m_1 について $\mathsf{m}_1 = \mathsf{r}^1\mathsf{m}$ を得る．

同様の議論が m_2 から m_5 についても成り立ち，さらに $\mathsf{m} = \mathsf{m}_0 = \mathsf{r}^0\mathsf{m}_0$ であるから，一般に

$$\mathsf{m}_k = \mathsf{r}^k\mathsf{m} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

が言える．この $k \in \mathbb{Z}$ は mod 6 により絶対最小剰余 $-2 \leq k \leq 3$，または最小非負剰余 $0 \leq k \leq 5$ にすることができる．

これから，正 6 角形 $\mathscr{H}$ の鏡映対称は次の 6 個であることが示された：

$$\mathsf{m} = \mathsf{m}_0,\quad \mathsf{m}_1 = \mathsf{r}^1\mathsf{m},\quad \mathsf{m}_2 = \mathsf{r}^2\mathsf{m},\quad \mathsf{m}_3 = \mathsf{r}^3\mathsf{m},\quad \mathsf{m}_4 = \mathsf{r}^4\mathsf{m},\quad \mathsf{m}_5 = \mathsf{r}^5\mathsf{m}. \tag{5}$$

以上，(4) と (5) によって，正 6 角形のもつ対称変換は次の 12 個であることが示された：

$$\begin{array}{llllll}
\mathsf{e}, & \mathsf{r}^1, & \mathsf{r}^2, & \mathsf{r}^3, & \mathsf{r}^4, & \mathsf{r}^5; \\
\mathsf{m}, & \mathsf{m}_1 = \mathsf{r}^1\mathsf{m}, & \mathsf{m}_2 = \mathsf{r}^2\mathsf{m}, & \mathsf{m}_3 = \mathsf{r}^3\mathsf{m}, & \mathsf{m}_4 = \mathsf{r}^4\mathsf{m}, & \mathsf{m}_5 = \mathsf{r}^5\mathsf{m}.
\end{array}$$

さて，これですべての変換を列挙することができた．これを行列に直すのは非生産的機械作業である．これで幻の (2) には決着がついた．

改めて，これら 12 個の，正 6 角形 $\mathscr{H}$ をそれ自身に重ねる変換からなる集合を D_6 で表わす：

$$D_6 = \{\mathsf{e}, \mathsf{r}, \mathsf{r}^2, \mathsf{r}^3, \mathsf{r}^4, \mathsf{r}^5, \mathsf{m}, \mathsf{rm}, \mathsf{r}^2\mathsf{m}, \mathsf{r}^3\mathsf{m}, \mathsf{r}^4\mathsf{m}, \mathsf{r}^5\mathsf{m}\}. \tag{6}$$

この D_6 を正 6 角形 $\mathscr{H}$ についての **2 面体群** (*dihedral group*) と言う．*dis* は Greek で「2」を表わし，*hedron* も Greek で「面」を意味する (正 4 面体は *tetrahedron* である)．

D_6 が**群をなす**ことは，次のようにして確かめられる：

- G0. D_6 に含まれる任意の 2 つの変換を続けて行なえば，やはり $\mathscr{H}$ はそれ自身に移される．変換の合成 $\mathsf{x} \circ \mathsf{y}$ を単に xy で表わせば，$\forall \mathsf{x}, \mathsf{y} \in D_6 : \mathsf{xy} \in D_6$ が成り立ち，D_6 は閉包性をもつ．
- G1. 変換の合成が結合法則 $(\mathsf{xy})\mathsf{z} = \mathsf{x}(\mathsf{yz})$ をみたすことは，変換が写像であることからも，またそれぞれの変換が直交群 $\mathrm{O}(2)$ の要素であることからも明らかである．
- G2. D_6 は単位元 e を含む．
- G3. D_6 の任意の要素について，その逆変換が存在する．例えば r^2 の逆元 $(\mathsf{r}^2)^{-1}$ は $\mathsf{r}^{-2} = \mathsf{r}^4$ であり，m の逆元は m 自身である．変換を写像と考えれば，xy の逆元 (逆写像)$(\mathsf{xy})^{-1}$ は $\mathsf{y}^{-1}\mathsf{x}^{-1}$ であるから，例えば $\mathsf{r}^2\mathsf{m}$ の逆元は
$$(\mathsf{r}^2\mathsf{m})^{-1} = \mathsf{m}^{-1}(\mathsf{r}^2)^{-1} = \mathsf{mr}^4$$
となる．

これで，D_6 がその名に恥じず**群である**ことが確かめられた．

......しかし，である．この最後に出て来た mr^4 が D_6 の要素であることは解ったが，D_6 の要素を列挙した (6) にはそれは現われない．一体，どれがこの mr^4 なのだろうか? また，例えば $\mathsf{r}^1\mathsf{m}_2$ とか，$\mathsf{m}_2\mathsf{r}^4$ は D_6 のどの要素なのだろうか．

我々は，未だ D_6 における計算規則について無知なのである．これらに答えるためには，D_6 の要素 x と y についてその「積」xy を計算する計算法にもう少し習熟する必要がある．言ってみれば，D_6 における「九九」，...，いや，D_6 は 12 個の要素からなるから「拾弐拾弐」を学ばねばならないのである．

Table1　拾弐拾弐

$\to$	e	r	r^2	r^3	r^4	r^5	m	rm	r^2m	r^3m	r^4m	r^5m
e	e	r	r^2	r^3	r^4	r^5	m	rm	r^2m	r^3m	r^4m	r^5m
r	r	r^2	r^3	r^4	r^5	e	rm	r^2m	r^3m	r^4m	r^5m	m
r^2	r^2	r^3	r^4	r^5	e	r	r^2m	r^3m	r^4m	r^5m	m	rm
r^3	r^3	r^4	r^5	e	r	r^2	r^3m	r^4m	r^5m	m	rm	r^2m
r^4	r^4	r^5	e	r	r^2	r^3	r^4m	r^5m	m	rm	r^2m	r^3m
r^5	r^5	e	r	r^2	r^3	r^4	r^5m	m	rm	r^2m	r^3m	r^4m
m	m	r^5m	r^4m	r^3m	r^2m	rm	e	r^5	r^4	r^3	r^2	r
rm	rm	m	r^5m	r^4m	r^3m	r^2m	r	e	r^5	r^4	r^3	r^2
r^2m	r^2m	rm	m	r^5m	r^4m	r^3m	r^2	r	e	r^5	r^4	r^3
r^3m	r^3m	r^2m	rm	m	r^5m	r^4m	r^3	r^2	r	e	r^5	r^4
r^4m	r^4m	r^3m	r^2m	rm	m	r^5m	r^4	r^3	r^2	r	e	r^5
r^5m	r^5m	r^4m	r^3m	r^2m	rm	m	r^5	r^4	r^3	r^2	r	e

確かに中途半端なものに終ってしまったことは，否定できない．特に，(3) については，部分群と生成元，組成列の話があってこそ，2 面体群 D_6 の代数構造の考察と初めて言えるからである．

それでも尚，O(2) と複素数平面との関係など，この document を手にするかもしれない友人達には，何らか得るところもあろうと思い，中途半端な形ではあるが公開することにした．群について，少しでも興味をもってくれたら，`kymst` にとってそれで望外の喜びである．

申し訳ない．

m(__)m

`Fri Sep 27 14:01:01 2013 JST`

以上の論考において，雪江 [雪江 10]，Armstrong[Arm97]，Rose[Ros09] を参考にした．特に Armstrong の著書は，Pre Univ. や Prepre Univ. の学生諸君にとって学ぶべきものが多い良書であると思う．

References

[Arm97] M. A. Armstrong. *Groups and Symmetry. corr. 3rd pr.* Springer UTM Series. Springer, 1997. ISBN: 3540966757.

[Ros09] Harvey E. Rose. *A Course on Finite Groups.* Universitext. Springer, 2009. ISBN: 9781848828889.

[雪江 10] 雪江明彦. 代数学 1. 群論入門. 日本評論社, 2010. ISBN: 9784535786592.

6 特別付録 — 作って遊べて楽しく学べる正 2 面体群 D_n

よい子は，次の p.15 にある図をていねいに切り取って 2 つに折り，のりで貼り合わせて正 2 面体群で遊びましょう．カラープリンターならばカラーになりますが，kymst は持っていません．カラープリンターを持っているリッチなよい子は，少し厚めの紙に印刷すると，よい正 2 面体群ができるでしょう．

モノクロで印刷しても全然おもしろくありませんが，数学的構造としてはカラーの場合と同じであることの証明が見つかっています．

Fig.3 D_3, D_4, D_5, D_6