円錐曲線の直交弦について
— 円錐曲線論 (1) —
Orthogonal chords of conic sections.
A Study on Conic Sections (1)

YAMASHITA, Koichiro (kymst)
FMFk (Free Math Forum by kymst)
url: http://kymst.net

Tue Jan 29 09:14:21 2013 JST

1 楕円の直交弦

1.1 Theorem

楕円 $\mathscr{E}: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ と 1 点 $\mathrm{K}\,(X,\,Y)$ で直交する 2 直線 ℓ_1, ℓ_2 の交点をそれぞれ $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2$; $\mathrm{Q}_1, \mathrm{Q}_2$ とする．

このとき，$\dfrac{1}{\mathrm{KP}_1\cdot\mathrm{KP}_2}+\dfrac{1}{\mathrm{KQ}_1\cdot\mathrm{KQ}_2}$ は，直線 ℓ_1, ℓ_2 の方向に依らず，$\mathscr{E}$ と K のみによって定まる不変量である．

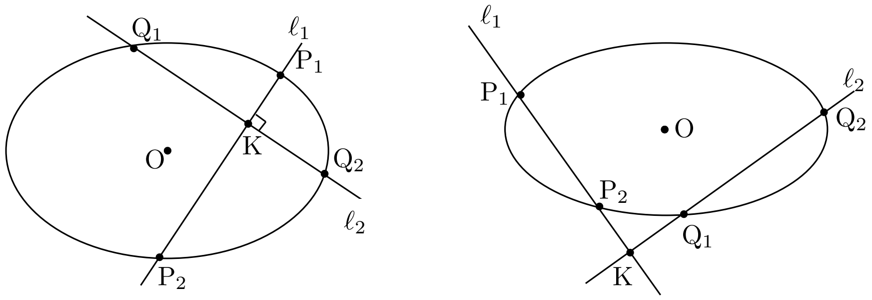
Proof

Figure 1 (p.1) を見られたい．

楕円 $\mathscr{E}$ の方程式を書き直して $b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0$ とし，この左辺を $E\,(x,\,y)$ とする：

$$\mathscr{E}:\ E\,(x,\,y)\ \stackrel{\text{def}}{=}\ b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0. \tag{1}$$

Figure1 楕円の直交弦



ℓ_1 の方向 vector を正規化して $\mathbf{u}_1=\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$ とし，$\cos\theta=\lambda,\ \sin\theta=\mu$ とする (この順序対 $(\lambda,\,\mu)$ を，直線 ℓ_1 の**方向余弦**と言う)．$\ell_2\perp\ell_1$ であるから，ℓ_2 の方向 vector *direction cosine*

を $\mathbf{u}_2=\begin{pmatrix}\cos(\theta+\pi/2)\\ \sin(\theta+\pi/2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\mu\\ \lambda\end{pmatrix}$ とすることができる.

ℓ_1 と ℓ_2 をそれぞれ t, s で parameterize して

$$\begin{aligned}\ell_1[t]:\mathbf{p}=\overrightarrow{\mathrm{OK}}+t\mathbf{u}_1 &\iff \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix},\\ \ell_2[s]:\mathbf{q}=\overrightarrow{\mathrm{OK}}+s\mathbf{u}_2 &\iff \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-\mu\\ \lambda\end{pmatrix}\end{aligned}$$

とする．ℓ_1 と楕円 $\mathscr{E}$ の交点 P_1, P_2 を与える t の値は, 方程式 $E\,(X+t\lambda,\,Y+t\mu)=0$ の解である：

$$\begin{aligned}0&=E\,(X+t\lambda,\,Y+t\mu)\\ &=b^2(X+t\lambda)^2+a^2(Y+t\mu)^2-a^2b^2\\ &=\big(b^2\lambda^2+a^2\mu^2\big)t^2+2\big(b^2X\lambda+a^2Y\mu\big)t+b^2X^2+a^2Y^2-a^2b^2.\end{aligned}$$

$\mathrm{P}_1(t_1)$, $\mathrm{P}_2(t_2)$ とすれば，t_1, t_2 はこの方程式の 2 解となり，解と係数の関係により

$$t_1t_2=\frac{b^2X^2+a^2Y^2-a^2b^2}{b^2\lambda^2+a^2\mu^2}=\frac{E\,(X,\,Y)}{b^2\lambda^2+a^2\mu^2} \tag{2}$$

が成り立つ.

ℓ_2 と $\mathscr{E}$ の交点 $\mathrm{Q}_1,\mathrm{Q}_2$ についても全く同様にして，$E\,(X-s\mu,\,Y+s\lambda)=0$ を作り，s について整理すれば

$$\big(b^2\mu^2+a^2\lambda^2\big)s^2+2\big(-b^2X\mu+a^2Y\lambda^2\big)s+E\,(X,\,Y)=0$$

が得られるから，$\mathrm{Q}_1[s_1]$, $\mathrm{Q}_2[s_2]$ として

$$s_1s_2=\frac{E\,(X,\,Y)}{b^2\mu^2+a^2\lambda^2} \tag{3}$$

が成り立つ.

点 $\mathrm{K}\,(X,\,Y)$ が $\mathscr{E}$ 上の点でない限りで $E\,(X,\,Y)\neq 0$ であるから，(2) と (3) の逆数を作ることができて，それを加えて

$$\frac{1}{t_1t_2}+\frac{1}{s_1s_2}=\frac{b^2\lambda^2+a^2\mu^2}{E\,(X,\,Y)}+\frac{b^2\mu^2+a^2\lambda^2}{E\,(X,\,Y)}=\frac{a^2+b^2}{E\,(X,\,Y)} \tag{4}$$

を得る.

線分 KP_1 などの長さを**絶対長**と見なせば，$\mathrm{KP}_1=\big|t_1\big|$ などとなるから， *absolute length*

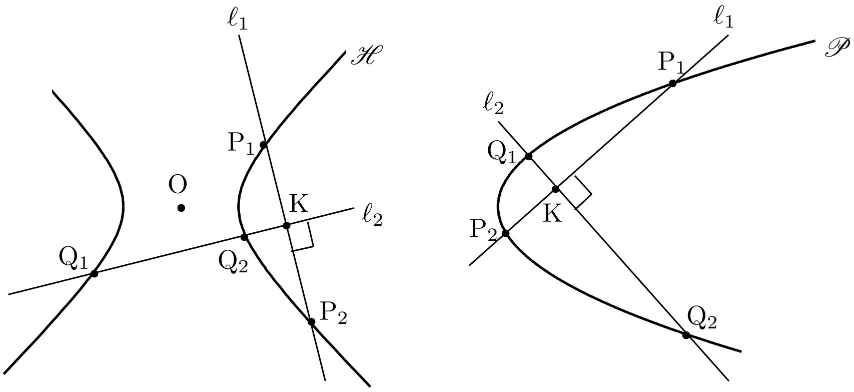
$$\frac{1}{\mathrm{KP}_1\cdot\mathrm{KP}_2}+\frac{1}{\mathrm{KQ}_1\cdot\mathrm{KQ}_2}=\frac{a^2+b^2}{\big|E\,(X,\,Y)\big|}$$

が成り立つ．これは確かに，直線 ℓ_1,ℓ_2 の方向，つまり方向余弦 $(\lambda,\,\mu)$ に依存しない，楕円 $\mathscr{E}$ と点 $\mathrm{K}\,(X,\,Y)$ のみによって定まる不変量である．K が $E\,(x,\,y)$ の正領域，つまり楕円 $\mathscr{E}$ の外部，にあれば $E\,(X,\,Y)>0$ であり，負領域，つまり内部，にあれば $E\,(X,\,Y)<0$ である．■

1.2　Theorem

双曲線 $\mathscr{H}$: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$，放物線 $\mathscr{P}: y^2=4ax$ についても，1.1 Theorem と同じ命題が成り立つ.

Figure2　双曲線と放物線の場合



Proof

証明は 1.1 Theorem とまったく同じである．双曲線 $\mathscr{H}$ の方程式を $H(x,y) \overset{\text{def}}{=} b^2x^2-a^2y^2-a^2b^2=0$ として，ℓ_1,ℓ_2 を同様に表わし，方程式を作って 2 解の積を求めれば

$$t_1t_2=\frac{H(X,Y)}{b^2\lambda^2-a^2\mu^2},\quad s_1s_2=\frac{H(X,Y)}{b^2\mu^2-a^2\lambda^2}$$

を得る．逆数を作って加えて

$$\frac{1}{t_1t_2}+\frac{1}{s_1s_2}=\frac{b^2-a^2}{H(X,Y)}$$

となる．放物線の場合も，$P(x,y) \overset{\text{def}}{=} y^2-4ax=0$ とすれば，同じように作った方程式の 2 解の積は

$$t_1t_2=\frac{P(X,Y)}{\mu^2},\quad s_1s_2=\frac{P(X,Y)}{\lambda^2}$$

となり，

$$\frac{1}{t_1t_2}+\frac{1}{s_1s_2}=\frac{1}{P(X,Y)}$$

を得る．■

これで我々は，3 種類の円錐曲線についての一様な命題として，その直交弦の性質を把握したことになる．しかし，ここで満足しては，**ウスラコムズカシミッタレ数学**である．

一様な命題には一様な証明があるはずである．以下の証明は，

岩田 至康 編『幾何学大辞典』全 6 巻，補巻 2 巻 (槇書店，1971-)

の第 6 巻 命題 568 (p. 275) の証明である．この辞典にはいろいろと文句もあるのだが，結局なんだかんだと世話になっている．今回は悪口を控える．命題 568 をそのまま引用する．ただし，表記を改め，証明は簡略化した.

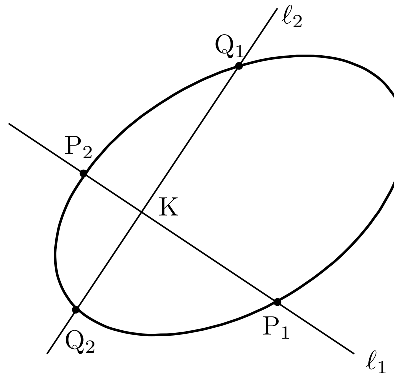
1.3　Theorem

定点 K を通り，直交する 2 弦 $\mathrm{KP_1P_2}, \mathrm{KQ_1Q_2}$ を 1 つの円錐曲線に引けば,

$$\frac{1}{\mathrm{KP_1}\cdot\mathrm{KP_2}}+\frac{1}{\mathrm{KQ_1}\cdot\mathrm{KQ_2}}$$

の値は一定である.

Figure3　In General...



Proof

円錐曲線 $\mathscr{C}$ が，K を原点とする直交座標系で

$$\mathscr{C} : F(x,y) \overset{\text{def}}{=} ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

と表わされたとする．また，ℓ_1 の方向余弦を $(\lambda,\,\mu)$ とすれば，ℓ_2 の方向余弦は $(-\mu,\,\lambda)$ とできる．今度も，$\ell_1[t]$, $\ell_2[s]$ によって parameterize する．K を原点としているから，ℓ_1 上の点は $\mathrm{P}\,(t\lambda,\,t\mu)$ と表わされ,

$$\begin{aligned} F(t\lambda,t\mu) &= at^2\lambda^2+2ht\lambda t\mu+bt^2\mu^2+2gt\lambda+2ft\mu+c=0 \\ \iff& \left(a\lambda^2+2h\lambda\mu+b\mu^2\right)t^2+2(g\lambda+f\mu)t+c=0 \end{aligned}$$

という 2 次方程式を得る．この 2 解を t_1, t_2 とすれば

$$t_1t_2=\frac{c}{a\lambda^2+2h\lambda\mu+b\mu^2}$$

を得る．同様に，ℓ_2 上の点は $\mathrm{Q}\,(-s\mu,\,s\lambda)$ と表わされ，$F(x,y)=0$ に代入して整理すれば，2 解を s_1, s_2 として

$$s_1s_2=\frac{c}{a\mu^2-2h\mu\lambda+b\lambda^2}$$

となる.

$c=F(0,0)$ であるから，これらの逆数の和として

$$\frac{1}{t_1t_2}+\frac{1}{s_1s_2}=\frac{a+b}{c}=\frac{a+b}{F(0,0)}\ \text{(const.)}$$

となり，同じ式が得られた．■

You will WIN! You must WIN!! Thank You, ByeBye.