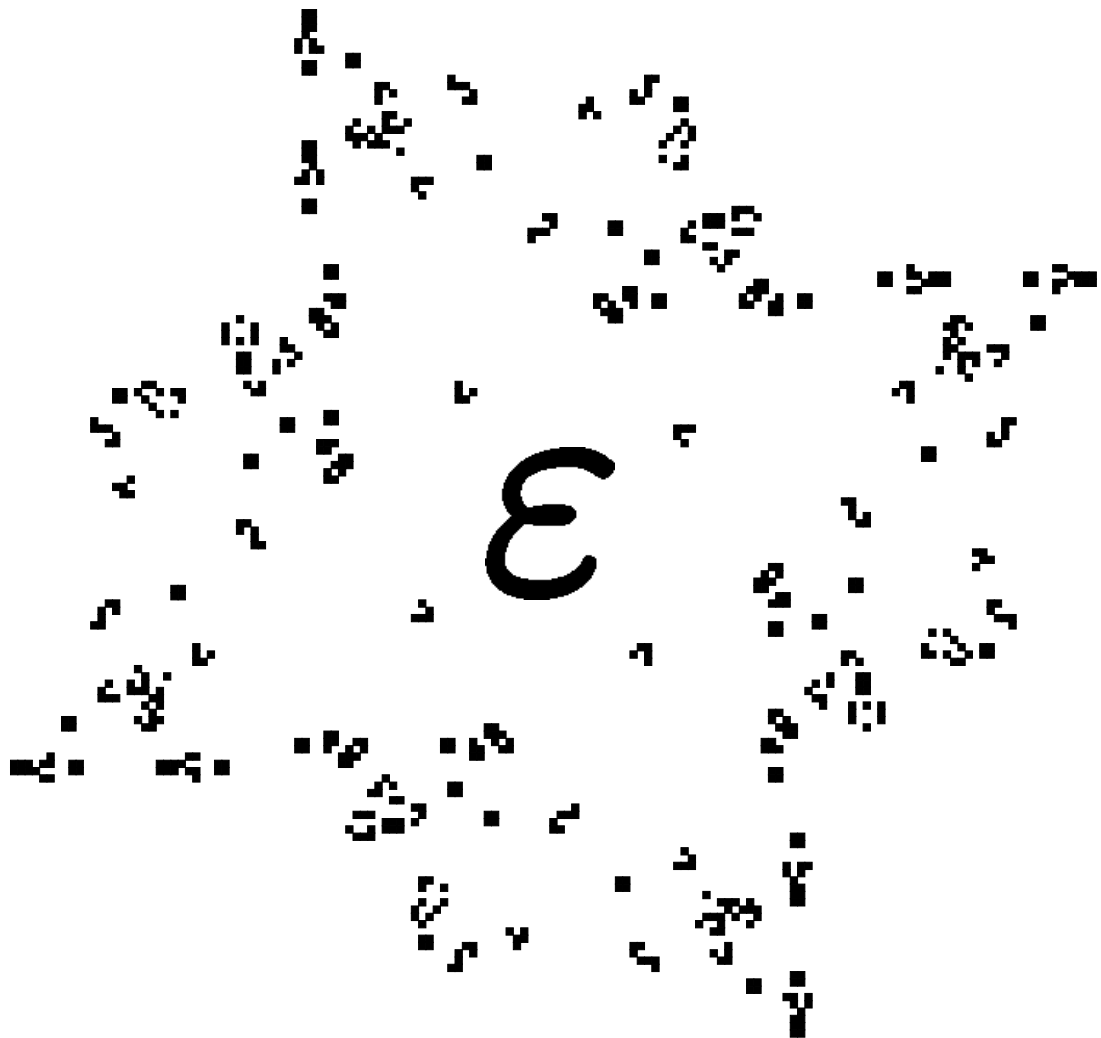


Volume 1, Number 3, June 2016

Acta Epsilonica

a publication of the Group Epsilon



<http://kymst.net/index.php?GrpE/journal>

Gunstar-Epsilon

背景には Conway's Game of Life において gunstar と呼ばれる物体を配した. Conway's Game of Life において gunstar とは, 広義の宇宙船を 4 方向に永遠に打ち出し続ける物体のことをいう. この gunstar が打ち出す宇宙船は glider と呼ばれている. Glider は hacker を象徴する記号として使われることもある. 今回の場合, 四方に打ち出される glider は様々な分野に広がっていく Group Epsilon の構成員を象徴しており, gunstar はそれらを生み出す Group Epsilon を象徴している.

中央には Computer Concrete フォントで書かれた ε の文字を配した. Computer Concrete フォントは $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ の開発者である Donald Knuth が著書 Concrete Mathematics を出版する際に用いたフォントであり, 彼から連綿と受け継がれる美意識を象徴するものである.

「共苦」

世の中、「共」ばやりである。曰く「共生」、曰く「公共」、曰く「共同」……当然のことだが、この「共」は、自己に対する他者の存在、そしてそれとの関係性の成立を前提とする。しかし、我々は他者との関わりの成立について、明確な理解を有しているであろうか？

そんなことを考えていたとき、次の一文が目をつけた：

共に楽しむ共楽、共に学ぶ共学、共に育てる共育、…、何より僕は、共に笑う共笑（ともえ）が大切だと思う。今の世の中では、片方ばかりが笑っている。

（2015/11/30 朝日新聞朝刊「天声人語」より）

今（2016/06）から考えると、なるほど自分という片方だけ笑おうとする地方自治体の知事もいた。

「共楽」を採り上げよう。その否定概念は何だろうか。De Morgan's Law を持ち出すまでもなく、「少くとも1人、楽しまない人（苦しむ人）がいる」ことである。もちろんみんなが楽しい方が、楽しまない人がいるよりもいい。では、それでいいのか。「楽しまない」と「苦しむ」の違いは何か？

亀山郁夫というロシア文学者がいる。ドストエフスキー『カラマゾフの兄弟』の翻訳を、光文社古典新訳文庫から出して、ドストエフスキーの翻訳物としては破格の読者を獲得した。

確かに訳が鮮明であり、筆者はこの訳書を手にとって以降、亀山ファンになった。

その著書に『ドストエフスキー 共苦する力』（東京外国語大学出版会、2009。ISBN: 9784904575017）がある。やはりドストエフスキーの代表作の一つ『悪霊』についての、根源的な洞察である。

「人間の傲慢さ」（それは、ドストエフスキーの全作品を貫くテーマである）に対して、作者は一つの答えを与えようとする。その反面教師が主人公スタブローギン（＝悪霊）であった。革命運動の指導者であったスタブローギンの犯す罪は、その異常な程高い能力をもって同志を「そそのかし」、その結果同志たちはスタブローギンの思想を理解・実践しようとして自壊していく中に見てとれる。それは、スタブローギン自身の自壊の過程でもあり、その特質は「そそのかし」、「使喚（しそう）」、「教唆」、「黙過」である。（スタブローギンの犯した罪自体、あるいは「具体的」罪深さについては、原著（の翻訳）『悪霊』を読みたい。やはり亀山氏の訳がある：『悪霊』光文社古典新訳文庫 全3＋1巻、2010。ISBN: 9784334752118/279/422/453。）

彼スタブローギンを使喚へと導くものは、一言で言えば「他者に対する、人間の生命そのものに対する、無関心」である。それは、「冷静に神の地位を篡奪するようなかたちで人間の命を奪っていく存在」であり、革命の同志たちは、スタブローギンの使喚により、殺し合い、あるいは自死により次々に命を落す。自分の手を汚さないことこそ、最大の罪なのだ。そこにあるのは、

* Group Epsilon 名誉顧問, Acta Epsilonica 主筆.

他者の生命, 他者の苦痛に対する感覚の麻痺である。

先ほど, スタブローギンを「反面教師」と呼んだ。では「反面」に対する「正面」は何か。その答えは明らかであろう。「共に楽しむ」だけでなく、「共に苦しむ」ことである。「そそのかし」の反対概念とは, 苦しみの一端を「引き受ける」ことではないか。それが「共苦」ではないだろうか。

(他者の) 苦しみが存在するその同じ地図上に我々の特権が存在する。

(スーザン・ソンドク『他者の苦痛へのまなざし』北條 文緒 訳. みすず書房, 2003 (2011). ISBN: 4622070472)

PS. この小さな column を書くに当たって, 亀山先生の上掲書に多くを負っています。この場を借りて, 先生に感謝したいと思います。「ドストエフスキー読み」を自認していた筆者のドストエフスキー観を, 先生の作品は根底的に覆してくれました。

また, 本誌 *Acta Epsilonica* 各号の巻頭言として, このような欄を引き受けることになりました。編集委員の方々, 特に mirai san に感謝し, また執筆が大幅に遅れたことに対して, 深謝したいと思います。 kymst

次号 Vol. 1, No. 4 では, 次の KOTOBA — ΛΟΓΟΣ — 言葉を探り上げます:

“LORD, You said that once I decided to follow you, You would walk with me all the way. But I have noticed that during the most troublesome times of my life, there is only one set of footprints. I don’t understand why when I needed You most You would leave me.”

The LORD replied, “My son, My precious child, I love you and I would never leave you. During your times of trial and suffering, when you see only one set of footprints, it was then that I carried you.”

(*FOOTPRINT IN THE SAND*. Author Unknown.)

統合情報理論の可能性

荻田裕也 *

概要

本稿では, 2016-1st meeting で私が発表した“我々はどこから来たのか —意識の定式化—”の内容を数理的に詳述するとともに, 意識研究にとどまらない統合情報理論の可能性について考察する. 統合情報理論は, Giulio Tononi によって意識を定量化するために考案された理論である. この理論が本当に意識を表すかはさておき, 複雑に相互作用するネットワークが生み出す機能がある意味で定量化していることは間違いない. 統合情報量は, ネットワーク中の機能モジュールを識別する指標として有望である. 実際の生命システムに適用することを念頭において, 時系列データから統合情報量を近似的に計算する方法を述べ, 簡単なシミュレーションによって指標の有用性を確認する.

キーワード: 意識, 情報理論, 統合情報理論, 生物学.

1 意識をどう定式化するか

意識がある状態と無い状態の間には, 決定的な違いがあるように直観される. 人の意識状態を理解することは, 科学者や哲学者の積年の夢であった. 一方, 近年になってこの問いが実用上も重要であると明らかになった. Locked-in (閉じこめ) 症候群をはじめとする“反応はないが意識はある”状態の発見である. 従来, 意識の尺度は, 医師の指示を理解して, 声, 手足, 言語を通じて反応できるかによって便宜的に定量化されていた. しかし, locked-in 症候群の患者は, 脳血栓等により, 随意運動を行う能力を失っている (眼球運動のみが随意的に可能な場合も多い). その結果, 感覚や思考は鮮明であるのに, 医師の指示に答えられず, 植物状態と誤診されてしまう. 意識の定量化に成功すれば, 臨床医療の場において, 意識が無いと勘違いされて非人道的に処置される患者の数を減らせるであろう.

アメリカの神経学者 Giulio Tononi は情報理論における情報量の概念を用いて, 意識を定式化しようとした. 彼のアイデアの中心は, 意識は情報が多く統合された場合に表出する, という直観であ

* 東京大学 理学部 物理学科 (2016 年卒業), four_seasons0702 (at) yahoo.co.jp.

る¹。彼がこのアイデアにたどりついた経緯は一般書 [1] に譲るとして、主張をおおまかにまとめれば、次のようになる。

情報が統合される量は統合情報量 Φ で表され、 Φ が大きいシステムは意識をもつ。

注意されたいのは、統合情報理論は提案されて日が浅く、理論として成熟していない点である。そのため、定式化の方法にもいくつかのバリエーションがあり、決定版はない。ただ、基本的な方針だけはどのバリエーションにおいても一貫している。

- 統合情報量は、相互作用² し時間発展する変数の組 (相互作用の関係をネットワークと呼ぶ) に対し定義される。
- 統合情報量は、ネットワークを分割した部分ネットワークが生む情報の総和に比べて、もとのネットワーク全体の生む情報がどれだけ大きいかを定量化する。

の二点である。本稿では、離散時間、離散状態のマルコフ遷移における統合情報理論 [4] を紹介する。なお、本稿を読む際に情報理論の初等的な知識があると読みやすい。次章で、記法の導入も兼ねて、情報理論について多少説明するが、詳述はしない。情報理論の入門書としては、文献 [2] がおすすめである。

2 準備: 情報理論

2.1 情報量とは

前章では、情報量、統合情報量 という言葉が登場した。この情報量とはいったい何者であろうか。情報量は確率事象を扱う文脈で定義される。まず、定義から述べよう。

確率 p の事象 x が起きた事を知ることで得られる情報量は、 $I(x) = -\log_2 p$ bit³ である。

数学的にはこれで終わりであるが、この定義の意味を述べよう。まず、確率が低い事象が起こった時の方が、情報量は大きい。‘昨日の試験でのび太君が満点を取らなかった’⁴ という言説を聞いても、まあそうだろうね、ということになり特に情報量はない。‘のび太君が満点を取った’ と聞けば、これはすごい事を聞いたぞ、となるわけである。情報量は、驚きの程度 *surprisal* と呼ばれることもあるが、その理由も感じていただけたらと思う。

もうひとつの重要な意味は、情報は分割して伝えることができ、それによって情報量は不変であるという点だ。例えば、1 から 100 のどれかの数字がランダムで出てくるビンゴゲームのマシーンを考

¹ 意識のある状態では情報が多く統合されている、というのは直観的に納得できる。しかし、情報が多く統合されていることこそが意識の本質である、と逆を主張するのが Tononi の仮定である。

² 相互と書いたが、一方的なものも含む。

³ 対数の底は、情報量の単位に対応している。底が 2 の時の単位は bit であるが、底が 10 の時は dit、底が自然対数の時は nit もしくは nat が情報量の単位となる。本稿では、対数の底が何であるか (単位系が何であるか) にはあまりこだわらない。

⁴ 8 割以上の点数、でもよい。

えよう. 出た数字の情報を伝えるとき, 数字を直接言ってもよいが ($p = 1/100$), まずは, 偶数か奇数かを言ってから ($p = 1/2$), その中で何番目か ($p = 1/50$) を言っても同じ情報量になる. これを式で表すと次のようである. 対数の底は省略している.

$$I(x) = -\log \frac{1}{100} = I(y) + I(z) = -\log \frac{1}{2} - \log \frac{1}{50}.$$

ここで, x は 1 から 100 のどれかを知らせる事象, y は偶奇を知らせる事象, z は 1 から 50 番目までのどれかを知らせる事象を表している.

2.2 確率分布, 同時確率分布, 独立同時分布

情報量は確率事象を扱う文脈で定義されると書いたが, 本節では事象全体を見たときの性質として, 確率分布についての記号を整理しよう. 起こりうる事象が全部で n 種類あるとき, i 番目の事象の生起確率 p_i をまとめたものが離散確率分布 $\{p_i\}_{i=1}^n$ である. これを簡単に $\{p\}$ と書くこともあり,

$$\{p\} = \{p_i\}_{i=1}^n = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$$

である. 確率分布が事象 $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ と対応しているとき, 事象のまとまりを大文字の X 一文字で表し, 対応する確率分布を P_X で表すことが多い. つまり, $X = \{x\}$ や, $P_X = \{p(x)\}$ などと書く.

つぎに, ふたつの異なる確率分布を同時に考えることをしよう. 事象 x_i と y_j が同時に起こる確率を同時確率と呼び, $p(x_i, y_j)$ で表す. この時, 同時確率分布は $P_{X,Y} = \{p(x, y)\}$ と書ける. ここで注意したいのは, 一般に, x と y は独立ではないため,

$$p(x_i, y_j) \neq p(x_i)p(y_j)$$

となる点である. よって, ここではさらに, $p_{i,j} = p(x_i)p(y_j)$ についての確率分布も定義したい. この確率分布に特に名前は付いていないが, 便宜上, 独立同時分布とでも呼ぼう. これを $P_X \cdot P_Y$ で表す. 複数の異なる n 種類の事象について独立同時分布を表すときは, 積記号を用いて,

$$\prod_{i=1}^n P_{X_i} = P_{X_1} \cdot P_{X_2} \cdots P_{X_n}$$

と書くこととする. 当然, 考えている全ての事象が独立であるとき, 同時確率分布と独立同時分布は一致する.

2.3 条件つき確率, 条件つき確率分布

それぞれの確率事象は一般には独立ではない. この時, ある事象 y が起こったことがわかっていると, その下で別の事象 x が起こる確率は異なってくる. この時の確率を条件つき確率と呼び, $p(x|y)$ で表す.

この考え方は, 前節で述べた確率分布にも同様に適用できる. つまり, ある事象 y が起こったことがわかっていると, その下で別の事象 $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ が起こる確率が変わるため, 事象 y の下での

条件つき確率分布が定義できる.

$$P_{X|y} = \{p(x_1|y), p(x_2|y), \dots, p(x_n|y)\}.$$

2.4 情報論的エントロピー, 相互情報量

情報量は, ある特定の事象 x についての性質であった. ここでは, 確率分布 $P_X = \{p(x)\}$ についての性質として, 情報論的エントロピーを導入する. まず, 情報論的エントロピー $H(X)$ は以下で定義される.

$$H(X) = \sum_i p(x_i) I(x_i) = - \sum_i p(x_i) \log p(x_i).$$

情報論的エントロピーは, 事象 x を知ろうとした時に得られるであろう情報量の期待値を表している. この値が大きいほど, 情報を知ること (測定と言ってもよい) が有効となる. つまり, 裏を返せば, 情報論的エントロピーが大きいほど状況が乱雑であり, 前もって予想できない, ということである.

条件つきエントロピーというものも定義できる. 事象 y の下での条件つき確率を用いて,

$$H(X|y) = - \sum_i p(x_i|y) \log p(x_i|y)$$

であり, これをさらに y についても期待値をとると,

$$H(X|Y) = - \sum_j p(y_j) \sum_i p(x_i|y_j) \log p(x_i|y_j)$$

と定義できる. 同様に, 同時確率についてもエントロピーを定義でき,

$$H(X, Y) = - \sum_i \sum_j p(x_i, y_j) \log p(x_i, y_j)$$

と表す.

次に, ふたつの事象の関連度合いを示す相互情報量という量を定義しよう. これは, ふたつの確率分布 P_X, P_Y と, その同時確率分布 $P_{X,Y}$ の性質として求まる. 定義は以下ようになる.

$$I(X; Y) = H(Y) - H(Y|X) = H(X) - H(X|Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y).$$

各等号が成立することは, 各自確認されたい. 意味としては, Y の情報を得たときの X の条件つきエントロピーが, Y の情報を得なかったときのエントロピーに比べてどれだけ小さくなるかを表している. つまり, X と Y の関連度を表していると言える. 式を見てわかるよう, 相互情報量は, X, Y について対称である. 実際, 和の形に書き下して書くと, 以下ようになる.

$$I(X; Y) = - \sum_i \sum_j p(x_i, y_j) \log \frac{p(x_i)p(y_j)}{p(x_i, y_j)}.$$

なお, 相互情報量の記号 $I(X; Y)$ と, 情報量の記号 $I(x)$ が重複していることには注意が必要である. 通常の情報理論では, 情報量に特定の記号を与えることはなく, 相互情報量の方を I で表す. 以降本稿では, 情報量として記号 I を用いることはない.

2.5 Kullback-Leibler divergence

同じ要素数を持つふたつの確率分布がどれだけ異なるかを定量化したい場合がある。例えば、あるイカサマさいころは、全ての目が均等確率で出るような理想的なさいころに比べるとどれだけ異なっているであろうか。この“どれだけ”に答えるのが、情報論的距離 Kullback-Leibler divergence D_{KL} という量である。同じ要素数の事象 X, Y の確率分布 P_X, P_Y を考えよう。定義は以下のようになる。

$$D_{KL}(P_X || P_Y) = \sum_i p(x_i) \log \frac{p(x_i)}{p(y_i)}.$$

この量は非負であり、0 となるのは P_X と P_Y が厳密に同じ場合のみである⁵。ただし、 D_{KL} は対称性をもたない、すなわち $D_{KL}(P_X || P_Y) \neq D_{KL}(P_Y || P_X)$ であるため、実は距離の公理をみたさない。よって正確には、情報論的擬距離と言うべきである。

さらに、 D_{KL} は、各事象 X, Y における label の付け方に依存することにも注意されたい。よって、ただ要素数が同じだけのふたつの確率分布を比べても意味をなさない。先に挙げたさいころの例のように、ふたつの確率分布どうしで要素間の対応がつく場合にはじめて意味を持つ。

3 Tononi の統合情報理論

3.1 統合情報量の定義

複数の状態変数 (X でまとめて表す) が相互作用にもとづいて時間発展するとき、その状態変数と相互作用をさしてネットワークと呼ぼう。ネットワーク S が取りうる状態ベクトルのひとつ $\mathbf{x} \in X$ が時刻 t で実現しているとする。 $\mathbf{x}$ の値は離散値をとるものとし、定まった規則によって時間ステップ毎に変化するものとする。この規則は確率で表現されていてもよい。この時、状態ベクトル $\mathbf{x}$ についての統合情報量 $\phi(S; t, \mathbf{x})$ を定義する。そして、ネットワーク S の統合情報量を以下で定義する。

$$\Phi(S; t) = \text{Exp}_{\mathbf{x}}[\phi(S; t, \mathbf{x})] = \sum_{\mathbf{x}} p_t(\mathbf{x}) \phi(S; t, \mathbf{x}). \quad (1)$$

ここで $p_t(\mathbf{x})$ は、状態 $\mathbf{x}$ が時刻 t で観測され得る確率である。以下では、相互作用が定常である特殊な場合を考え、上記の値が t によらない場合を考える⁶。では、 $\phi(S; \mathbf{x})$ の計算手順を述べよう。

$\phi(S; \mathbf{x})$ を計算する上で、ネットワーク S を重なりと余りなく分割する方法を考え、これを $\mathcal{P} = \{M^1, M^2, \dots, M^r\}$ で表す。ここで M^i は S の分割 $\mathcal{P}$ における i 番目の部分ネットワークである。 M^i の状態ベクトルを $\mathbf{m}^i$ で表す。一般に、ひとつのネットワークについて複数の分割が考えられる。この分割の中で、部分ネットワークのみで生成する情報量が最も多い分割を用いて統合情報量

⁵ ここでは証明しないが、 D_{KL} の非負性は Gibbs の不等式として知られている。

⁶ 実際の生物においても、適切な時間スケールを考えればこの仮定は十分成立しうる。相互作用が t に依存する場合にも理論を拡張することは可能であるが、実験で検証することを念頭におくと現実的でないため、ここでは考えない。

を定義する⁷.

さて、上のアイデアを実現するために、ある分割 $\mathcal{P}$ について便宜上の統合情報量として effective information $\tilde{\phi}(S; \mathbf{x}, \mathcal{P})$ を考える. これは、 S 全体から予想される一時刻前の状態の確率分布と、 $\mathcal{P}$ から予想される一時刻前の確率分布の間の Kullback-Leibler divergence D_{KL} を用いて定義される.

$$\tilde{\phi}(S; \mathbf{x}, \mathcal{P}) = D_{\text{KL}} \left(P_{X_0|\mathbf{x}} \left\| \prod_{i=1}^r P_{M_0^i|\mathbf{m}^i} \right. \right). \quad (2)$$

下付添え字の 0 は一時刻前であることを表している. ここで、注目している (部分) ネットワークの外の状態については、そのネットワーク自身は知ることができないとして、ネットワーク外の確率分布としては、最も不確かさの大きいものを仮定する. 数式だけではイメージが湧きづらいが、具体的な計算の例を次節で挙げるので、しばらく辛抱いただきたい.

さて、こうして全ての分割について effective information が求まるわけであるが、これらの値を単純に比べることはできない. 分割数 r や、部分ネットワークの大きさ $|M^i|$ によって、取り得る値の範囲が大きく異なるからである. そのため、以下の値で規格化した上で比較する.

$$N(\mathcal{P}) = (r - 1) \min_i [H(M_0^i)]. \quad (3)$$

ここで、 $H(M)$ はネットワーク M における状態の確率分布に関する情報論的エントロピーである.

以上で、部分ネットワークのみで生成する情報量が最も多い分割、言い換えれば、もとのネットワーク全体を考えてはじめて生成する情報量が最も小さい分割 (Minimum Information Partition) が求まる. これを、 $\mathcal{P}^{\text{MIP}}$ で表す.

$$\mathcal{P}^{\text{MIP}}(\mathbf{x}) = \underset{\mathcal{P}}{\operatorname{argmin}} \left\{ \frac{\tilde{\phi}(S; \mathbf{x}, \mathcal{P})}{N(\mathcal{P})} \right\}. \quad (4)$$

状態 $\mathbf{x}$ に関する統合情報量は以下のように表される.

$$\phi(S; \mathbf{x}) = \tilde{\phi}(S; \mathbf{x}, \mathcal{P}^{\text{MIP}}(\mathbf{x})). \quad (5)$$

ここで、Minimum Information Partition を求めるときのみ規格化を行い、最終的な値では規格化を行っていないことに注意されたい. これは、分割の構造を問題にするか、情報の絶対量を問題にするかの違いである⁸.

3.2 統合情報量の計算例

ここでは前節で述べた $\tilde{\phi}$ の計算法の具体例を挙げる⁹. ここで考えるのは図 1 のようなネットワークである. 簡単のため、各ノードが 0 か 1 のみをとる 2 値の場合を考える. 時間発展は決定論的に次の規則で決まっているものとする. すなわち、どのノードも自分に 1 の入力がある場合は次

⁷ これは逆に言えば、 ϕ の値が小さくなる分割である. Minimum Information Partition と呼ばれ、 $\mathcal{P}^{\text{MIP}}$ と表される. ネットワーク全体としてはじめて生成される情報量を考えるために、このような分割に着目する.

⁸ 規格化の方法については議論があり、この方法に異を唱える人も多い.

⁹ 2016-1st の発表で説明した例とは異なるものを挙げた. より簡単な例については、2016-1st の発表 slide を見られたい.

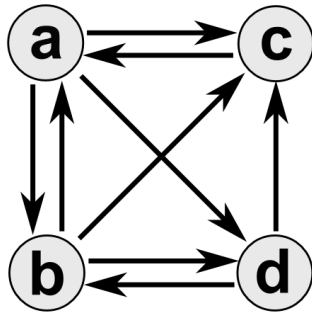


図1 具体例のネットワーク.

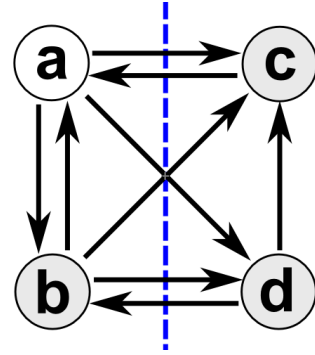


図2 初期状態と分割. 白色が1, 灰色が0を表す.

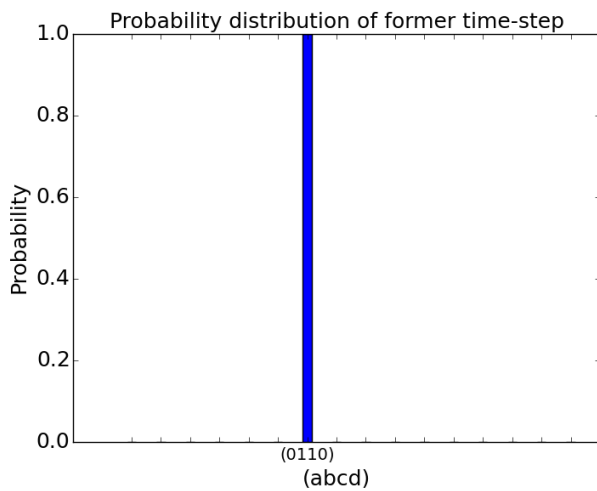


図3 全体から推定した確率分布.

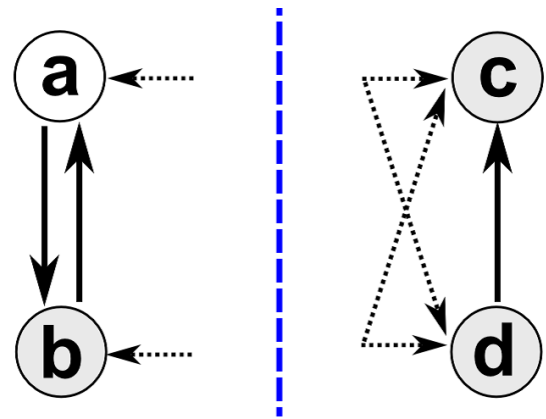


図4 部分ネットワークにおける考え方の概念図.

の時間ステップで0になり, 1の入力がふたつ以上の時は次の時間ステップで1になるとする. 状態ベクトルは $\mathbf{x} = (abcd)$ で表せる. ここでは具体例として状態が $\mathbf{x} = (1000)$ であるとき, 図2のような分割に関する $\tilde{\phi}$ を計算する.

まずはじめに, ネットワーク全体の情報から一時刻前の状態の確率分布を考えよう. $a = 1$ のためには, $c_0 = b_0 = 1$ でなければならない. $d = 0$ のためには, $b_0 = 1$ より, 確実に $a_0 = 0$ である. 最後に, $c = 0$ のためには, $d_0 = 0$ が必要とわかるから, 一時刻前の状態が確実に推定できて, $\mathbf{x}_0 = (0110)$ とわかる (図3).

次に, 分割後の部分ネットワークについて, 一時刻前の状態分布を推定する (図4). 図の点線の矢印は着目系の外からの入力であり, この部分の値はランダムに定まるノイズのように考える.

左部の部分ネットワーク M^1 について, 現在の状態ベクトル $\mathbf{m}^1$ は, $\mathbf{m}^1 = (ab) = (10)$ である. $a = 1$ より, $b_0 = 1$ は確実である. $\mathbf{m}_0^1 = (a_0b_0) = (01)$ の場合, $\mathbf{m}^1 = (10)$ を与えるノイズ入力は, $(c_0d_0) = (10), (11)$ の2通りである. 同様に, $\mathbf{m}_0^1 = (11)$ の場合, $\mathbf{m}^1 = (10)$ を与えるノイズ入力は, $(c_0d_0) = (10)$ の1通りである. ノイズ入力は最も不確かであると仮定しているから, 各ノイズ入力が起こる確率は均等で, 完全にランダムである. よって, $\mathbf{m}_0^1 = (01)$ であった確率は $2/3$, $\mathbf{m}_0^1 = (11)$

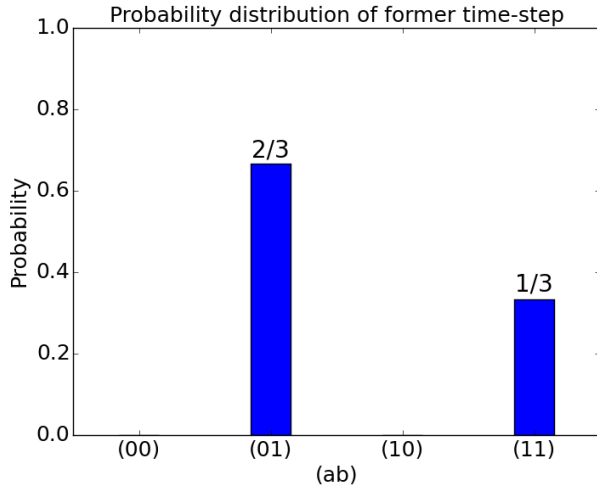


図5 M^1 から推定される確率分布.

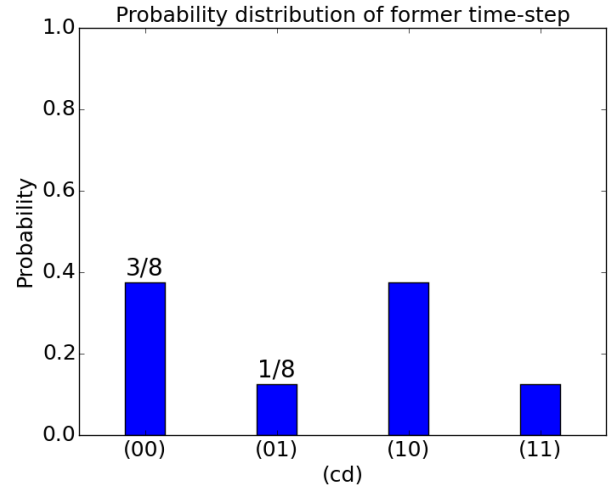


図6 M^2 から推定される確率分布.

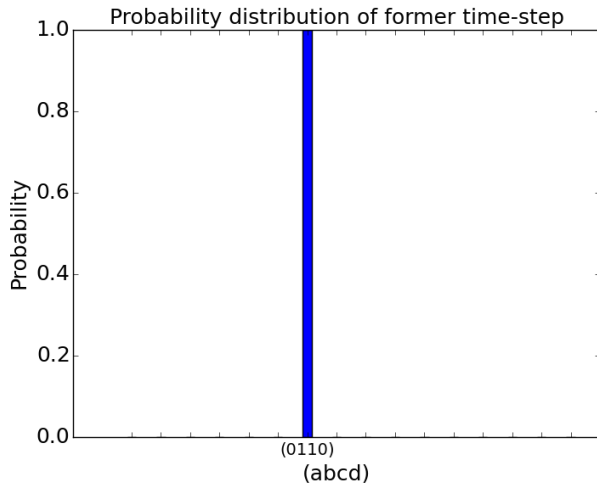


図7 全体から推定した確率分布 (再掲).

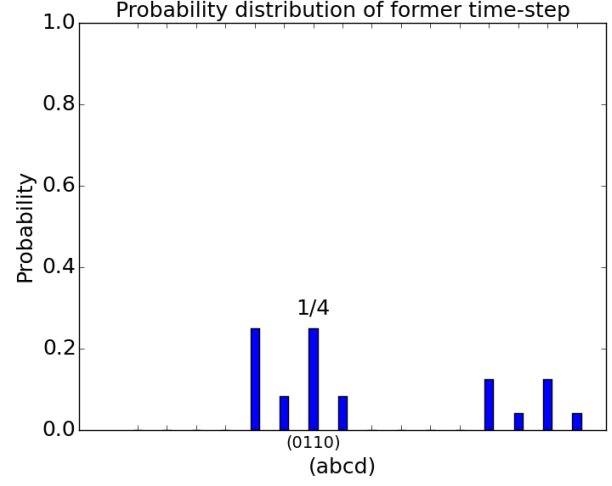


図8 分割から推定した確率分布.

であった確率は $1/3$ と推測できる. すなわち, 部分ネットワークの現在の状態 $\mathbf{m}^1$ を用いて一時刻前の部分ネットワーク M_0^1 の状態について推定した確率分布 $P_{M_0^1|\mathbf{m}^1}$ は図5のようになる.

右側の部分ネットワーク M^2 については, 同様に, 各 $\mathbf{m}_0^2$ に対し, $\mathbf{m}^2 = (00)$ を与えるノイズ入力 (a_0b_0) が何通りあるかを数え上げればよい. 結果として, 図6のような確率分布 $P_{M_0^2|\mathbf{m}^2}$ が推定される.

以上を合わせると, 分割から推定される一時刻前の確率分布 $\prod_{i=1}^2 P_{M_0^i|\mathbf{m}^i}$ は図8のようになる. あとは D_{KL} を計算するだけで, 次のように計算できる.

$$\tilde{\phi}(S; \mathbf{x}, \mathcal{P}) = D_{\text{KL}} \left(P_{X_0|\mathbf{x}} \left\| \prod_{i=1}^2 P_{M_0^i|\mathbf{m}^i} \right. \right) = -\log \frac{1}{4} = 2 \text{ bit (単位は } \log \text{ の底を } 2 \text{ とした)}.$$

これで, この分割についての effective information が求まった. あとは, 同様の計算を全ての分割のパターンについて行えば, このネットワーク S が状態 $\mathbf{x}$ について生成する統合情報量を求めるこ

とができる.

4 機能モジュールの識別

さて, 前章で統合情報理論のバリエーションのひとつを紹介したが, 意識というものをかなり抽象化して議論していることが実感いただけたと思う. 実際, 統合情報理論それ自体は, 意識の問題とは独立した理論である. Tononi は, この統合情報量と意識を対応付けたのであるが, 別の見方もできる. つまり, 統合情報量は意識に限らず, 機能を持つモジュールを一般に識別できるのではないか, という予想である.

以降では, この立場にたって議論を進める. 実際, 私自身は統合情報理論が意識を表すかどうかに関しても懐疑的である. 一方で, 情報の統合に着目して定量化した理論は歴史的にも新しく, その意味で統合情報理論は, 生物や経済などの複雑系を考える上で有望な武器になると考える.

従来の生物学, 経済学は, 要素間の因果や相関に注目してきたわけであるが, 一般に因果, 相関と, その結果として生まれる機能は対応しない, という問題がある. 例えば, 全く同じように発火する神経細胞群は, 相関こそ高いが, 単純すぎてそれだけでは高次の機能を持ち得ない. つまり, 機能モジュールを発見するためには, 因果, 相関のみに頼った解析では不十分であり, 新たな方法論が必要とされている. 統合情報理論がその方法論となるのではないか, ということだ.

もちろん, 統合情報理論の適用にあたっては実用上の問題がある. 最も大きな障害は計算量である. 一般にネットワークを分割する場合の数は, Bell 数と呼ばれる数であり, ネットワークの大きさに対して爆発的に増大する. さらに, 前章で紹介した理論は, 離散時間, 離散状態におけるものである. 実際のデータのほとんどは連続状態であるから¹⁰, この点についても拡張の必要がある. 以上の点を解消して, 実験データに適用できる指標としたのが, 次に述べる Barrett の経験的統合情報量である.

5 Barrett の経験的統合情報量

5.1 Tononi の統合情報量についての重要な表現

Barrett の経験的統合情報量は Tononi の統合情報量を実験データから近似的に求めることを目標に考案された. その導入の前に, Tononi の統合情報量を変形しておく, 見通しが良い. さて, 統合情報量は,

$$\Phi(S) = \text{Exp}_{\mathbf{x}}[\phi(S; \mathbf{x})] = \sum_{\mathbf{x}} P(\mathbf{x}) \phi(S; \mathbf{x})$$

であった. ここで, 状態 $\mathbf{x}$ に関する統合情報量の表式は,

$$\phi(S; \mathbf{x}) = \tilde{\phi}(S; \mathbf{x}, \mathcal{P}^{\text{MIP}}) = D_{\text{KL}} \left(P_{X_0|\mathbf{x}} \left\| \prod_{i=1}^r P_{M^{\text{MIP}}_0|\mathbf{m}^i} \right. \right)$$

¹⁰ 時間については, サンプリング時間を考えると離散のままでも問題ない.

である. ここで, $M_0^{\text{MIP}^i}$ は Minimum Information Partition における i 番目の部分ネットワークの一時刻前の状態を表している. 注意しなければいけないことは, $\mathcal{P}^{\text{MIP}}$ が $\mathbf{x}$ に依存する点である. このままでは, $\phi(S; \mathbf{x})$ の具体形を代入しても, 計算を進めることができない. そこで, 分割を固定した上で effective information の期待値 $\tilde{\Phi}(S; \mathcal{P})$ を考えることとする. すると今度はうまく計算できる. D_{KL} の定義,

$$D_{\text{KL}}(P_X || P_Y) = \sum_i p(x_i) \log \frac{p(x_i)}{p(y_i)}.$$

を思い出そう. すると, 以下のように計算できる.

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(S; \mathcal{P}) &= \text{Exp}_{\mathbf{x}}[\tilde{\phi}(S; \mathbf{x}, \mathcal{P})] = \sum_{\mathbf{x}} p(\mathbf{x}) D_{\text{KL}} \left(P_{X_0 | \mathbf{x}} \left\| \prod_{i=1}^r P_{M_0^i | \mathbf{m}^i} \right\| \right) \\ &= \sum_{\mathbf{x}} p(\mathbf{x}) \left[\left(\sum_j p(x_{0j} | \mathbf{x}) \log p(x_{0j} | \mathbf{x}) \right) - \left(\sum_{\{j_k\}_{k=1}^r} p(x_{0\{j_k\}_{k=1}^r} | \mathbf{x}) \log \prod_i p(m_{0j_i}^i | \mathbf{m}^i) \right) \right] \\ &= \left(\sum_{\mathbf{x}} p(\mathbf{x}) \sum_j p(x_{0j} | \mathbf{x}) \log p(x_{0j} | \mathbf{x}) \right) \\ &\quad - \left(\sum_{\mathbf{x}} p(\mathbf{x}) \sum_{j_1} \sum_{j_2} \cdots \sum_{j_r} p(m_{0j_1}^1, m_{0j_2}^2, \dots, m_{0j_r}^r | \mathbf{x}) \sum_i \log p(m_{0j_i}^i | \mathbf{m}^i) \right) \\ &= -H(X_0 | X) - \sum_{\mathbf{x}} p(\mathbf{x}) \left(\sum_{j_1} \sum_{j_2} \cdots \sum_{j_r} p(m_{0j_1}^1, m_{0j_2}^2, \dots, m_{0j_r}^r | \mathbf{x}) \sum_i \log p(m_{0j_i}^i | \mathbf{m}^i) \right). \end{aligned}$$

式変形の二列目において, 独立同時分布をあらわに表す際に index が複雑になっていることに注意されたい. ここで, 第二項の括弧の中身について, i の和の部分进行分解し, $i = 1$ のみを考えてみよう. すると, j_1 以外の和が実行できて,

$$\sum_{j_1} \cdots \sum_{j_r} p(m_{0j_1}^1, \dots, m_{0j_r}^r | \mathbf{x}) \log p(m_{0j_1}^1 | \mathbf{m}^1) = \sum_{j_1} p(m_{0j_1}^1 | \mathbf{x}) \log p(m_{0j_1}^1 | \mathbf{m}^1).$$

さらに, 条件つき確率の定義式,

$$P(x|y) = \frac{P(x, y)}{P(y)}$$

を用いれば,

$$\sum_{\mathbf{x}} p(\mathbf{x}) \sum_{j_1} p(m_{0j_1}^1 | \mathbf{x}) \log p(m_{0j_1}^1 | \mathbf{m}^1) = \sum_{\mathbf{x}} p(\mathbf{m}^1) \sum_{j_1} p(m_{0j_1}^1, \mathbf{m}^2, \dots, \mathbf{m}^r | \mathbf{m}^1) \log p(m_{0j_1}^1 | \mathbf{m}^1).$$

$\mathbf{x}$ の和について, 各 $\mathbf{m}^1, \mathbf{m}^2, \dots, \mathbf{m}^r$ の和に分解して実行すると, $\mathbf{m}^1$ 以外は実行できて,

$$\sum_{\mathbf{x}} p(\mathbf{m}^1) \sum_{j_1} p(m_{0j_1}^1, \mathbf{m}^2, \dots, \mathbf{m}^r | \mathbf{m}^1) \log p(m_{0j_1}^1 | \mathbf{m}^1) = \sum_{\mathbf{m}^1} p(\mathbf{m}^1) \sum_{j_1} p(m_{0j_1}^1 | \mathbf{m}^1) \log p(m_{0j_1}^1 | \mathbf{m}^1).$$

この最後の表式は, $-H(M_0^1 | M^1)$ に他ならない. よって結局, 以下が成立する.

$$\tilde{\Phi}(S; \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^r H(M_0^i | M^i) - H(X_0 | X). \quad (6)$$

この表式は、分割が非常にうまくいったと仮定すると、さらに簡単にすることができる。Minimum Information Partition では、ネットワークを情報の観点での繋がりが最も弱い部分で分割したことを思い出そう。分割が最もうまくいったときは、部分ネットワーク同士の相関は 0 である。この時、全体のエントロピーは、単純に各部分ネットワークのエントロピーの和となる。

$$H(X_0) = \sum_i H(M_0^i)$$

現実の Minimum Information Partition でもこれに近い関係が成立すると考えれば、

$$H(X_0) \sim \sum_i H(M_0^i) \quad (7)$$

と近似できる。この近似のもとでは $\tilde{\Phi}$ はさらに使いやすい形となり、

$$\tilde{\Phi}(S; \mathcal{P}) \sim I(X_0; X) - \sum_{i=1}^r I(M_0^i; M^i) \quad (8)$$

となる。

5.2 経験的統合情報量

Tononi の統合情報量の定義では、離散状態のみを扱うため実際のデータに適用することが困難であった。そこで Barrett は式 (8) からの類推で、実験データから統合情報量の近似値を計算する指標を考案し、計算機実験でこの指標が統合情報量の良い近似となることを確かめた [3]。この指標は経験的な (empirical) 統合情報量と名付けられ、 $\Phi_E(S; \tau)$ で表される。計算の手順を述べよう。まず empirical な effective information の期待値として、次を考える。

$$\tilde{\Phi}_E(S; \tau, \mathcal{B}) = I(X_{t-\tau}; X_t) - \sum_{i=1}^2 I(M_{t-\tau}^i; M_t^i). \quad (9)$$

ここで、 $\mathcal{B}$ は二分割 (Bipartition) を表す¹¹。あとは、Tononi の場合と同じように、Minimum Information Bipartition を探せばよい。つまり、経験的統合情報量の定義は、

$$\Phi_E(S; \tau) = \tilde{\Phi}_E(S; \tau, \mathcal{B}^{\text{MIB}}) \quad (10)$$

であり、ここで、

$$\mathcal{B}^{\text{MIB}} = \underset{\mathcal{B}}{\operatorname{argmin}} \left\{ \frac{\tilde{\Phi}_E(S; \tau, \mathcal{B})}{N_e(\mathcal{B})} \right\} \quad (11)$$

$$N_e(\mathcal{B}) = \min[H(M_t^1), H(M_t^2)] \quad (12)$$

である¹²。ここで、Tononi の場合とは、分割を選ぶ手順と期待値をとる手順の順番が逆になっていることに注意。以上の表式はデータ間の相互情報量のみで表現できているため、実験データから計算できる。

¹¹ 分割数を一般の形に拡張することは容易であるが、計算量の問題で、実用上は分割数を一定の値で区切る必要がある。Barret は最も単純な場合として、二分割で定義した。

¹² 定常状態を仮定しているため、一般にこれらの値は t によらず、 τ のみによる。 τ は時間のスケーリングと関連する。

ただしこの場合, 状態の確率分布や条件つき確率分布をデータから構築する必要があるため, 膨大なサンプルが必要となる. そこで, データが多変量正規分布に従う場合に限り, 共分散を用いたより簡便な計算法を用いることができる. 今回は計算法の詳細には触れないが, 興味のある方は文献 [3] を参照されたい. なお, 次章のシミュレーションでは共分散を用いた計算法を用いている.

6 シミュレーション

統合情報量が時系列データから機能モジュール¹³を特定しうるか, 簡単なモデルについてシミュレーションを行ってみた. 用いたのは, ガウス雑音のもとでの, 線形かつマルコフ的な系である. この系においては, 状態の時間発展は,

$$X_t = A \cdot X_{t-1} + E_t$$

で記述される. ここで, A は重み付きの隣接行列であり, ネットワークの構造を表している. E_t はガウス雑音を表すベクトルであり, 各成分は独立に, 平均 0, 分散 1 のガウシアンノイズとする.

シミュレーションの手順は以下の通りである.

1. $X_t = A \cdot X_{t-1} + E_t$ に従って時系列データを生成する.
2. データの成分の中から特定の成分の組を選ぶ (部分ネットワーク).
3. 選んだ成分の組を 2 つの群に分ける (Bipartition).
4. データから共分散行列を計算し, $\tilde{\Phi}_E$ を計算する¹⁴.
5. 手順の 3–4 を繰り返すことで, Minimum Information Bipartition を見つけ, Φ_E を求める.
6. 手順の 2–5 を繰り返すことで, Φ_E の値が大きい部分ネットワークを見つける.

今回シミュレーションしたのは, 図 9 のようなネットワークである. ノード間の結合重みは 0.25 と小さくしたため, 生データをみればわかるよう (図 10), 激しいノイズののったデータとなっている. このデータのみから構造を推定することを試みた. 生データとしては, 初期条件から十分ランダムに変化したと思われる時間 (3000 step) を $t = 0$ として, そこから 3000 step 分のデータを用いた. $\tau = 1$ とし, 多変数ガウス分布の仮定の下で計算を行った. なお, 今回は時間とプログラム技術の関係で¹⁵, ノードが 3 つから構成されるネットワークに絞って網羅的に調べた. 計算の結果は表 6 のようになった.

この結果をみると, (123), (456) の部分ネットワークだけ桁違いに統合情報量が多い. 今回のように雑音が多いデータについても, モジュール識別のために統合情報量が有用である可能性が示唆される¹⁶.

¹³ このモデルは単純であるため, 機能と相関との区別がつかない. 統合情報量の有用性を検証するためには, 相関と機能が一致しない系を調べる必要がある. 生物や論理回路を実験的に調べるのが近道と考える.

¹⁴ 共分散を用いた計算法については, 文献 [3].

¹⁵ 自分は, 網羅的な分割を簡潔に記述できるアルゴリズムを考えつかなかった.

¹⁶ 今回のモデルは非常に簡単であるため, この結果が統合情報量の威力を保証するわけではないが, 最低限, 識別できてほしいものは識別できた.

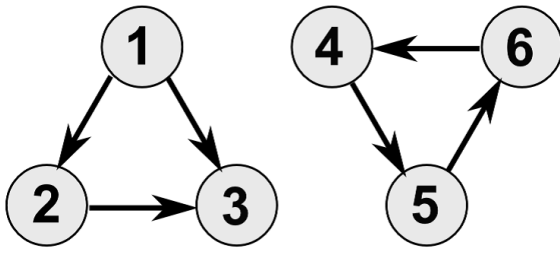


図 9 シミュレーションしたネットワーク. フィードフォワードとフィードバックのネットワークが分離して存在している. 各エッジの重みは全て 0.25 とした.

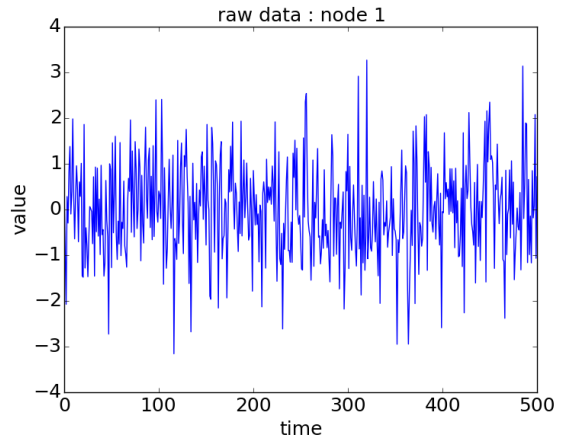


図 10 ノード 1 についての生データ.

表 1 ノード 3 つの部分ネットワークについての統合情報量の計算. 単位は bit.

部分ネットワーク	Φ_E	部分ネットワーク	Φ_E	部分ネットワーク	Φ_E
(123)	0.072	(456)	0.095	(124)	0.001
(356)	0.00076	(125)	0.00086	(346)	0.00089
(126)	0.0009	(345)	0.00038	(134)	0.00069
(256)	0.00062	(135)	0.00088	(246)	0.00077
(136)	0.00087	(245)	0.00075	(145)	0.0012
(236)	0.0011	(146)	0.00065	(235)	0.00017
(156)	0.001	(234)	0.00092		

7 まとめ

統合情報理論は意識を記述するために考案されたが,それを適用できる範囲は広く,複雑系の機能の程度を一般的に表現すると期待される.本稿では, Tononi による統合情報理論を紹介したのち,実験に適用する際の有用な近似として, Barrett の機能的統合情報量を導入した.これを用いて,時系列データからシステムの機能モジュールを推定できることを,簡単なモデル上で実際に確かめた.

一般に因果関係の構造と,機能モジュールとは一致しないはずである.近年の因果推論に関する研究の発展はめざましいが,それだけでは高次の機能を解き明かすには足りない.統合情報理論が複雑系を解明する突破口となることを夢想して,本稿を終えたい.

謝辞

Acta Epsilonica や Group Epsilon の活動を通して,本稿を書くきっかけを与えてくださった山下弘一郎先生に感謝いたします.また,本稿の Review を通して,多くの有用なコメントをくださった

Referee の方に感謝いたします.

参考文献

- [1] MARCELLO MASSIMINI AND GIULIO TONONI, 花本知子 (訳): 意識はいつ生まれるのか, 亜紀書房, 2015.
- [2] 甘利俊一: 情報理論, ちくま学芸文庫, 2011.
- [3] ADAM B. BARRETT AND ANIL K. SETH: Practical Measures of Integrated Information for Time-Series Data, *PLoS Comput Biol* **7** (2011) 1.
- [4] DAVID BALDUZZI AND GIULIO TONONI: Integrated Information in Discrete Dynamical Systems: Motivation and Theoretical Framework, *PLoS Comput Biol* **4** (2008) 6.

Acta Epsilonica

Volume 1, Number 3, Pages 53–72.

Received: June 15th, 2016, Accepted: June 22nd, 2016.

SXXXXX-YAMASHITA'S EULER'S TRIANGLE

山下弘一郎 *

廣祥吾 †

Note: 以下, 「3: 多項式 $R_n(x)$ についての主定理とその系」までは, 筆者 kymst の身体的・物理的な事情から, 都内のある病院に入院中に編まれたものである. 最終的な time stamp は Sat Jun 27 18:08:25 2015 JST となっている.

退院後の闘病生活によって, 現在 (06/15, 2016) では半人前程度の日常生活が送れるようになった. これも, 家族と, とりわけ Group Epsilon (G_P^E) に集う知人・友人たちの応援の賜物である. 本当にありがとう.

その証しとして, ここに機関誌 *Acta Epsilonica* に, 拙いものではあるが, この論考を投稿することにした. 友人・知人諸君の叱咤激励を, 待ち望むものである.

コトの発端

「先生, 気が済みました.」

コトは唐突に始まった. 受験生 S が講義の合い間の休憩時間にもって来たのは, たくさんの等式が綴られている数枚の計算結果であった. 実は, 前の週の講義で

$$S(p, n) := \sum_{k=1}^n k^p r^k \quad (p \in \mathbb{N})$$

の計算について話をしたところだった. Text にあるのは, せいぜい $p = 2$ 程度である.

「アンタラ, これで満足するワケ?」と, いつものように挑発, $p = 3, 4$ あたりまで板書で計算したと思う.

$p = 0$ ならばただの幾何級数 (GEOMETRICAL SERIES, どこぞの高校数学後進国では「等比数列の和」などという江戸時代末期の言い方をしているらしい) であり, $p = 1$ ならば

$$S(1, n) := \sum_{k=1}^n k r^k$$

* Group Epsilon G_P^E , Free Math Forum by kymst F_{MF} (<http://kymst.net>)

† 慶應義塾大学理工学部数理科学科

で、「等差 × 等比型の和」と呼ばれる計算である。公比を両辺に乗じて、もとの式から引けば幾何級数が得られるから、それで終りである。ところがこの方法を $p = 2$ の場合にも使おうとすると、意外と計算に手間取る。身をもって経験した諸君も多いのでは、と思う。

少しは (嘘でもいいからカッコつけて) 「べき幾何級数」位の言い方をすればいいのに.....

S がもって来たのは $S(12, n)$ の計算式である。帰納的に求められるので、 $p = 0$ の場合から始めて順次 p を大きくしていったらしい。 $p = 10$ から電卓の世話になったと白状してある (残念ながら、 $S(11, n)$, $S(12, n)$ については、計算が違っている。この辺の事情については後述する)。 $S(10, n)$ の結果は次である: $f(x)$ を x の多項式として $S(10, n)$ は $f(x)/(1-x)^{12}$ と表わされ、このとき $f(x)$ は次になる:

$$\begin{aligned} f(x) = & x^{11} + 2036x^{10} + 152637x^9 + 2203488x^8 \\ & + 9738114x^7 + 15724248x^6 + 9738114x^5 + 2203488x^4 \\ & + 152637x^3 + 2036x^2 + x. \end{aligned}$$

これを導いた後、「**気が済んだのでここでやめる ■**」とある。一般の $p \in \mathbb{Z}^+$ について、 $S(p, n)$ を生成する漸化式も、あるいはその多項式の係数を表わす一般項もない。素晴らしいではないか! これは、かの ÉVARISTE GALOIS がその死に至らしめる決闘の明け方、「時間がない」という欄外へのなぐり書きとともに、「証明は思い付くであろう。」によって「証明終了」に代えたのと似ている (**ホント力?**)。彼はこの kymst に「気が済んだ。漸化式および一般項は思い付くであろう。」と語りかけたのだ。かくして、世の数学者には、この S の等式の証明とその漸化式、一般項の発見が託された。大きな違いは、書いた S 本人がピンピンしていることである (いつの間にか、自分の方が後世に生きることになってしまった.... **ズーズーシ!**)。

無益な NOTE at Tue Feb 23 08:35:43 2016

この辺の事情とは、次のような経緯を辿っている。S からこの report を受け取った後、kymst が緊急入院したことによって、ジックリと計算結果を検討することができなかった。この document の early draft を何人かに見せたところ、友人 mirai さん、mone さん、hiro さんから「面白い」という (無益な) お世辞を頂いた。

この document の公開には、多少逡巡するところがあつた。それは、入院直後に、kymst の精神世界に S が (本人がどう思おうとも) 土足で入りこんできたことによる。それで腹を立てて、この document についてはお蔵入りにしようか? と思っていたところ、何人かの方から「絶対に公開すべきだ!」という mail を頂き、一人病室で書き続けた。

そうこうする内に、hiro さんが Emacs Lisp での、この漸化式の計算 program を書いて下さった。実に smart で cool な program である。この program も加えた形で、公刊が予定されている digital magazine, *Acta Epsilonica* Vol. 1 に掲載してもらう積もりである。

その後今日に到るまで、入退院を繰り返しながらの闘病生活が続いている。

S よ、お前がどのような心情で生きていようと、それはかまわない。しかし、その心情、精神世界を、他人に押し付けるべきではない!

有益な NOTE at Tue Feb 23 08:35:43 2016

$p = 12, 13$ の場合の正しい計算結果を, 以下に載せておく:

p	13	12	11	10	9	8	7
12		1	4083	478271	10187685	66318474	162512286
13	1	8178	1479726	45533450	423281535	431879684	127688356

p	6	5	4	3	2	1	0
12	162512286	66318474	10187685	478271	4083	1	0
13	431879684	423281535	45533450	1479726	8178	1	0

託された **kymst** はタマツタものではない. 「ウオ! ゲゲッ?! $p = 12$ かよ!? 何か見付かったかい?」と反応するのがやっとであった. 彼は涼しげに, 「はい, 対称性をもちます.」とだけ口にして, 去っていった.

対称性? アア, ソーカ. 多項式 $f(x)$ は**相反多項式**, **逆数多項式** (RECIPROCAL POLYNOMIAL) である, ということか.....

kymst は萌えた...ではなく, 燃えた. 思わずカッとなった. 思わずカッとなってやるのが数学である. その結果が以下の小さな document になった.

Thanks Much, S.

0 Small Preperations.

0.1 Abbreviation

前もって, いくつかの概念や言い回しをまとめておく:

■Category 1. この document の内部のみで意味をもつ概念, ないし符丁.

- **DD**: DIFFERENTIATION BY DETERMINANTS.

関数 $f(x) = u(x)/v(x)$ が微分可能であるとき, その導関数を

$$v^2 Df = \begin{vmatrix} \dot{u} & u \\ \dot{v} & v \end{vmatrix}$$

の形で求めること. 一般に有理関数の微分について, 強力な計算方法である.

- **ECoef**: Euler 係数 (EULERIAN COEFFICIENTS). 一般に, 「EULER 数」と呼ばれることがあるが, 多面体についての EULER 指標 EULER CHARACTERISTIC¹ と紛らわしい. ここでは, **EULER 数** (EULER

¹つまり, 種数 g の多面体の頂点 (vertex), 稜 (edge), 面 (face) の数をそれぞれ V, E, F とするときの POINCARÉ FORMULA $\chi \equiv V - E + F$ について, $\chi = 2 - 2g$ のこと. 多面体定理 (POLYHEDRAL THEOREM) とは $g = 0$ とした特別の場合である.

NUMBER) は EULER 指標のこととし, この document で考察される EULERIAN 数は EULER 係数と呼ぶことにする (とは言え, EULER 指標が扱われることはない). 何故 EULER 係数なのか?, そして何故一般にはそう呼ばれないで来たのか? こそが重要である.

- **ET:** EULER'S ARITHMETICAL TRIANGLE (EULER の算術 3 角形モドキ). 2 項係数の作る PASCAL の算術 3 角形と強い類似関係をもつ. 詳細は本文を読みたい.
- **SC:** この document が生まれるきっかけとなった S の行なった計算 (S CALCULATION). p.53 を見よ.
- **YT:** 極めて短命であった「YAMASHITA の算術 3 角形 (YAMASHITA'S ARITHMETICAL TRIANGLE)」. もちろん, かの EULER と張り合う積もりはなかったが.....
- **YI:** YAMASHITA'S IMPROVEMENT OF SC. kymst による SC-algorithm の改良と, そこから導かれるいくつかの帰結.

■Category 2. Mathematical Concepts

1. **FASTNER 積:** FASTNER PRODUCT. 2 つの無限級数 $\sum a_n, \sum b_n$ について定義されるそれらの積で

$$(\sum a_n, \sum b_n) \stackrel{\text{def}}{=} \sum a_n b_n$$

により定義される. 有限次元空間の内積の自然な拡張である. p を固定された正整数, k を index 変数として, 特に一方がべき級数 $\sum k^p$, 他方が幾何級数 $\sum r^k$ (r は差し当たっては実数である) の場合が, ここで扱われる p 次べき幾何級数である.

2. x D 演算: (x D-OPERATION). 微分可能な関数 $f(x)$ を x で微分した後, x を乗じる演算:

$$f(x) \xrightarrow{D} Df \xrightarrow{\times x} xDf.$$

この様に, 以下では微分演算子を D で表わすことが多い. JOHN RIORDAN [Rio60] は x D 演算子を δ で表わしている: $\delta f = xDf$.

3. Σ_p : p 次べき幾何級数.

$$\Sigma_p \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} k^p x^k; \quad p \in \mathbb{N} \text{ or } \mathbb{Z}^+ \text{ fixed}; \quad k \in \mathbb{Z}^+ \text{ index variable.}$$

上記, FASTER 積の定義を見られたい.

この document は, 専らこの Σ_p の計算と, その際に登場あう形式的級数 $r(x) = \sum a_k x^k$ に関するものであり, そして $r(x)$ が全く異なる文脈の中で再解釈されることの考察に当てられる (この再解釈にまでは, 射程が足りなかった. 続編を期待されたい).

0.2 Preparations

まずは, 最低限必要な, 行列と行列式についての話をまとめて置く (カッタルイのでまとめなかった. その分, 雑談が増えた). 以下の 0.3 については, 必要ならば kymst のこれまで書いてきた MJK (Math Jotter of kymst) Series から次のいずれかに目を通すだけで十分であろう:

- 『数学は i にあふれて』
- 『3 次正方行列』
- 『行列の可換性』

パラパラと流し読みして、必要ないと思った場合は、読者は直ちに §1 から始まる議論の核心部分へ入っていった欲しい。

そもそも、筆者 **kymst** 自身が以下の行列と行列式に導入についてはアキアキしているのである。ドコゾの国の愚民政府が企む「国民総痴呆化政策」のせいで、新たな document の作成に入る度に、同じようなことを繰り返さなければならないのである。もちろん、スマホにだけ喜びを見出している 9 割 5 分の圧倒的大多数 DQN に、行列式は必要ないであろう。必要性という点から言えば、足し算があればかけ算、つまり九九は**必要ない**のである。

同じ議論が vector と正射影についても言える。正射影**ダイスキ**人間 **kymst** を牽制する積りであったのかも知れない。予備校業界の大物（本人はその積り）である大先生（ここでは仮に K 先生としておく）との、text 編集会議において、

「正射影なんか、内積が解っていれば必要ないですよ？ **kymst** 先生?!」

と来た。モトモトこの権威主義者 K 先生がキライだった **kymst** は、

「まったくです、 $2+2$ から $9+9+9+9+9+9+9+9+9$ までは解っていれば、九九、必要ないッスからね。K 先生くらい何でも解ってらっしゃれば、食事も必要ないでしょう。ブドウ糖の点滴と vitamin 注射さえあれば、生きていく、という点では同値ナンسسカラ!」

..... ということで、首尾良く、幸いにも二度と口を聞いて貰えない、という、身に余る光栄に恵まれた。

夾雑物、(分を弁えた、しかし) 余計な贅沢、高望み、が、我々の生を彩る。その意味で、我々に必要なのは

ムリ 無理、ムチャ 無茶、ムダ 無駄の『三ム主義』

である²。ムリな詰め込み、ムチャな目標、ムダな努力無くして人間には知の大海は閉ざされたままであろう。これを地で行くのが「無駄のない勉強法」であり、それがなんと tablet 授業に繋がるらしい。

この無駄のなさ、学ぶものにとっての無駄ではなく、可能な限り教育予算を減らそうとする悶々禍愕省にとっての「無駄」であろう。教員と生徒との人格的な接触が、教育的効果を及ぼすところまで教員を育てる程、この国には教育費の余裕はない。あるのは、授業マニュアルを配布しておいて、tablet でその通りにやってもらうのが安上り、新卒のキレーなネーチャン使えば見端もいいし、という訳。TV の CM のマンマですな。

打倒、最小限主義! などという世間話はこの位にしておいて.....

² これを漢字で『三無主義』とすると、全く意味が変わってしまうので注意。どちらかと言うと、こちらは **kymst** の世代がそのオトーサン世代から浴びせられた批判、ケチツケ、罵詈雑言である。漢字 version の中身を知りたいければ、Google 先生、ヨロシク。

0.3 Vector, 行列, 行列式

『数学は i にあふれて』 [山下 11c], 『行列と可換性』 [山下 11b], 『3 次の正方行列』 [山下 11a] などを参照のこと.

1 べき幾何級数 $S(p, n)$ ($p \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}^+$).

話が通じている諸君には重複になるが, **べき幾何級数** (POWER & GEOMETRICAL SERIES) について定義し, その和を求める ALGORITHM の話に入ろう.

1.1 べき級数

一般に, **べき級数** (POWER SERIES) とは, 無限の長さをもつ 1 変数の多項式

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \quad (ad\ infinitum) \quad (1)$$

のことである. ここで, 係数 a_k は (差し当たっては) 実数として置く: $a_k \in \mathbb{R}$.

$|x| < 1$ であるとき, このべき級数は収束する. それはそれで嬉しい. しかし, この条件がみたされなくても, この式 (1) は「**形式的表現**」 (FORMAL EXPRESSION) としては意味をもつ. x は実数に値をとる **実数値変数** (REAL VARIABLE) であるが, x を upper case X にした

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n + \cdots \quad (ad\ infinitum) \quad (2)$$

では, X は変数ではなく (つまり, どんな値もとることのない), 単なる **不定元** (INDETERMINATE) と考える. つまり, $K \in \mathbb{N}$ について $a_K X^K$ とは $k = 0$ から数えて³ K 番目には a_K があるぞ! という, 意味しかもたないと考える訳である. このように考えた不定元 X は, 「枠文字」, 「位置指定子」 (PLACE-HOLDER) と呼ばれるが, 決定的にスッキリするのが T-shirts と洗濯バサミによる analogy である. a_K と書かれた T-shirts を洗濯竿に干すのに使う洗濯バサミが X^K に他ならない. この様に考えると, 式 (2) は次の (3) と同じ意味になる:

$$(a_n)_{n=0}^{\infty} = a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \quad (ad\ infinitum). \quad (3)$$

もしこうした解釈が許されるならば, 無限の長さの多項式を表わす (2) は無限列を表現する手段である以外ではない. このように考えたとき, 式 (2) を **形式的べき級数** (FORMAL POWER SERIES) と呼ぶ. これを $f(X)$ としよう. $X = 1$ を代入して $f(1)$ が収束するならば, 無限列 (3) から作られた級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ も収束するが, 収束しないからと言って (2) が意味を失なうわけではない.

³ このように 0 から数えることを “zero-origin” と言う.

このような考え方をすることによって, 例えば指数関数 e^x の TAYLOR EXPANSION

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots \quad (ad\ infinitum)$$

もまた, 無限の長さの多項式に他ならない, という言い方にも納得できるのではないだろうか. 形式的に考えるとき, **収束すれば儲け物, 収束しなくても困らない**のである. 何故か? 無限に並べただけなのだから, $x = 1$ を代入して発散するならば, **そんなもんを代入する方が悪い**のである.

1.2 幾何級数

古典ギリシア時代からの伝統として, 加法と減法に関わる概念や計算法を**算術的** (ARITHMETICAL) と呼び, 乗法と除法に関わるそれを**幾何的** (GEOMETRICAL) と呼ぶ. これは既成事実であり, メッタなことでは無い. 例えば

- 等差数列: ARITHMETICAL PROGRESSION (AP); / 等差中項: ARITHMETICAL MIDDLE; / 相加平均: ARITHMETICAL MEAN;
- 等比数列: GEOMETRICAL PROGRESSION (GP); / 等比中項: GEOMETRICAL MIDDLE; / 相乗平均: GEOMETRICAL MEAN

であるから, すべて「**算術**数列 / 中項 / 平均」, 及び「**幾何**数列 / 中項 / 平均」である.

江戸時代の末期が近づくころ, おそらくはオランダやポルトガルを経由して日本に Europe の近代科学が流れ込んできた. その時代に, チョンマゲを結って刀をぶら下げたお侍さんたちが, 一生懸命にそれを日本語に直そうとしたであろう. その努力には頭が下る. 恐らくは杉田玄白が「解体新書」を訳したのと同様時期であろう.

しかし, それから 200 年近くが経とうとしている. その間に, この国でも classical Greek mathematics は当然として, Europe の数学に対するある程度の理解が定着しているはずである. 「算術的」と「幾何的」が, 欧米の数学の中で相補的に対立していることの重要性は, 強調され過ぎることはあるまい. 難解をもってなるギリシア数学の無理数論がユークリッド『幾何学原論』にあり, 正多角形の定木と compass による作図可能性が, ガウス『数論考究』にあることにこそ, 西洋数学二千五百年の秘密を解く鍵が隠されている, と考えるのは, 筆者 kymst の無知蒙昧のせいだけではないように思う.

2 Yamashita's Triangle

2.1 S の計算 SC といくつかの計算例

Example 2.1 初項と公比がいずれも x (ただし $|x| < 1$) である幾何級数が

$$\Sigma_0 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} x^k = \frac{x}{1-x}$$

であることを用いて, $p = 1$ の場合のべき幾何級数

$$\Sigma_1 \stackrel{\text{def}}{=} \sum kx^k$$

を求めよ⁴.

Solution. 幾何級数

$$\Sigma_0 = \sum x^k = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^k + \cdots = \frac{x}{1-x}$$

を x で微分すると, 両辺について

$$D\Sigma_0 = \begin{cases} 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + kx^{k-1} + \cdots = \sum kx^{k-1}, \\ \frac{1}{(1-x)^2} (1 - x - x(-1)) = \frac{1}{(1-x)^2} \end{cases}$$

となるから, 次が恒等式として成立する:

$$\sum kx^{k-1} \equiv \frac{1}{(1-x)^2}.$$

この両辺に x を乗じて, 右辺は $\sum kx^k = \Sigma_1$ となるから,

$$\Sigma_1 = \sum kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}. \quad \blacksquare$$

もちろんこの程度であるならば, 部分級数

$$\Sigma_1^{(n)} = \sum_{k=1}^n kx^k = 1 \cdot x + 2x^2 + \cdots + kx^k + \cdots + nx^n$$

の両辺に x を乗じて

$$x\Sigma_1^{(n)} = 1 \cdot x^2 + 2x^3 + \cdots + kx^{k+1} + \cdots + nx^{n+1}$$

として, 第 1 式から第 2 次式を引いて

$$(1-x)\Sigma_1^{(n)} = x + x^2 + \cdots + x^n - nx^{n+1} = \frac{x(1-x^n)}{1-x} - nx^{n+1}$$

を得るから, 両辺 $1-x$ で割って

$$\Sigma_1^{(n)} = \frac{x(1-x^n)}{(1-x)^2} - \frac{nx^{n+1}}{1-x}$$

である. $|x| < 1$ であるから, $n \rightarrow \infty$ として vanish するものと考えれば

$$\Sigma_1^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Sigma_1 = \frac{x}{(1-x)^2}$$

を得る. 実際上の計算実行という点で考えれば, この方が速いのだが.....

⁴ 以下, この様に無限和であることが明らかな場合には, Σ 記号の上下の index を省略する.

Example 2.2 $p = 2$ として $\Sigma_2 = x(1+x)/(1-x)^3$ を確かめ, それを用いて $p = 3$ として Σ_3 を求めよ.

さて, 特にこの Σ_3 について, 通常の, 悶侮禍愕省オススメ, 「 x かけてズルッ! で引き算」戦略でやって, 正解を出す自信のある方はそうして下さい. 私にはとてもじゃないけど, その自信はありません. そこで, 悶侮禍愕省の出す「不良高校生がやることだ!」という「教育的指導」をありがたく受け入れつつ, ただの戦争マニア DQN 安倍政権への「血と汗と涙」の反抗を誓いましょう. 具体的には **SC** によるが, ここで **DD** と x D-演算が決定的に重要になります.

■ $p = 2$ における Σ_2 Example 2.1 (p.59) で得た

$$\Sigma_1 = 1 \cdot x + 2x^2 + \cdots + kx^k + \cdots = \frac{x}{(1-x)^2} \quad (4)$$

を微分する. 中央辺について

$$D\Sigma_1 = 1 \cdot x^0 + 2^2x^1 + 3^2x^2 + \cdots + k^2x^{k-1} + \cdots$$

であるから, x を乗じて

$$xD\Sigma_1 = 1 \cdot x^1 + 2^2x^2 + 3^2x^3 + \cdots + k^2x^k + \cdots = \Sigma_2$$

となる. また (4) の右辺について **DD** を用いれば

$$(1-x)^4 D\Sigma_1 = \begin{vmatrix} 1 & x \\ -2(1-x) & (1-x)^2 \end{vmatrix} = (1-x) \begin{vmatrix} 1 & x \\ -2 & 1-x \end{vmatrix} = (1-x)(1+x)$$

であるから,

$$D\Sigma_1 = \frac{1+x}{(1-x)^3}, \quad \text{therefore} \quad xD\Sigma_1 = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} = \Sigma_2$$

となる. よって $\Sigma_2 = x(1+x)/(1-x)^3$ を得るから, 確かに Example 2.1 に言うとおりである. ■

■ $p = 3$ における Σ_3 これを用いて Σ_3 を求めよう.

$$\Sigma_2 = 1^2x + 2^2x^2 + 3^2x^3 + \cdots + k^2x^k$$

に x D-演算を施して

$$xD\Sigma_2 = 1^3x + 2^3x^2 + 3^3x^3 + \cdots + k^3x^k + \cdots = \Sigma_3$$

である. また右辺については **DD** を用いて

$$(1-x)^6 D\Sigma_2 = \begin{vmatrix} 1+2x & x(1+x) \\ -3(1-x)^2 & (1-x)^3 \end{vmatrix}, \quad \text{therefore} \quad D\Sigma_2 = \frac{x^2+4x+1}{(1-x)^4}$$

であるから, 結局

$$\Sigma_3 = \sum k^3x^k = \frac{x(x^2+4x+1)}{(1-x)^4}$$

を得た. ■

Example 2.3 この作業を続けることにより, S の計算を検証する.....のは止めておこう.

2.2 Yamashita's Improvement — SC を振り返る.

我々は Σ_4 までの計算しか行っていないが, それでもこれらの計算からいくつかの結果を得ることができる. 任意の $p \in \mathbb{Z}^+$ について正しいことを言うためには, すべては帰納法の世話になる必要があるが, そもそも帰納法で何を示せば言いたいことが言えるのか? こそが重要である. まずは, 気がついたことを列挙して見よう.

- A. $p \in \mathbb{Z}^+$ について, $\Sigma_p = \sum k^p x^k$ の分母は常に $(1-x)^{p+1}$ である. これは計算過程を見ればほとんど明らかであろうが, 実はこの証明の中に, **YI** の重要性はすべて含まれている, とも言える.
- B. SC を信用することになると, 分子にある多項式の各次数の係数について次のような Table を得る.

Table1 Sxxxxx-Yamashita's Triangle (?)

$p \backslash x^k$	x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	sum
0	1							$1 = 0!$
1	1	0						$1 = 1!$
2	1	1	0					$2 = 2!$
3	1	4	1	0				$6 = 3!$
4	1	11	11	1	0			$24 = 4!$
5	1	26	66	26	1	0		$120 = 5!$
6	1	57	302	302	57	1	0	$720 = 6!$

結論を先取りする. ある意味で, S への批判である.

- B-1 まず, Σ_p の分子は定数項を含まない p 次の**相反多項式** (RECIPROCAL POLYNOMIAL) になる (S の言い方では「対称性をもつ」).
- B-2 分子の係数は, 上の Table 1 のような 3 角形をなす. この 3 角形は, 発見者の名にちなんで, その発見者によって, YAMASHITA'S TRIANGLE という名で一瞬呼ばれたが, 実は **Euler の 3 角形** (EULERIAN TRIANGLE) と言われていることが直ちに明らかとなった. 2 項係数のなす PASCAL'S TRIANGLE と極めて緊密な類比関係を有する (..... S はここには目が行くべきだったと思う.)
- B-3 残念ながら, この表で終わっては, 数値を見つけただけであり, 数学にはなっていない. この計算から何を学びとるか, こそが問われる. その意味では, **SC** は Report になっていない.
- B-4 上の Table で, 各行とも末尾に 0 があるが, この意味は後に明らかになる.

3 多項式 $R_n(x)$ についての主定理とその系

3.1 Main Theorem 1.

ここから, **kymst** の得た主定理と, その証明に入っていこうと思う. ただし, ブッキラボーに結果を挙げて「これが成り立つ, ではその証明. 次にこれが成り立ち, ハイ, 証明」では, 読む気が失せるというものである (このような数学の記述の仕方を DTP-format と言う. Desk Top Publishing かと思いきや, Definition-Theorem-Proof format である. このようなサップーケーさをカッコイイと思っ
てはいけない. 潤いのない数学は二流の数学だと知って欲しい). なるべく例を挙げて, 計算過程も見てもらいたいと思う. 先が見えた諸君は, その計算に無理して付き合う必要はない. 自分で判断を下しながら, 読み進めてくれればそれでよい.

Theorem 3.1 (MAIN THEOREM 1 BY **kymst**)

$p \in \mathbb{Z}^+$ として, p 次のべき幾何級数

$$\sum k^p x^k = 1^p x + 2^p x^2 + 3^p x^3 + \cdots + k^p x^k + \cdots (ad\ infinitum)$$

を Σ_p と表わす. このとき, Σ_p は

$$\Sigma_p = \frac{xR_p(x)}{(1-x)^{p+1}}$$

と表わされる. ここで $R_p(x)$ は $p-1$ 次の多項式であり, この多項式の列 (R_p) は

$$R_1(x) \equiv 1, \quad R_{p+1}(x) = (1+px)R_p(x) + x(1-x)\dot{R}_p(x) \quad (\text{RecF-P})$$

によって生成される (ここで $\dot{R}$ は $R(x)$ の導関数を表わす. また, Label として (RecF-P) としたのは, 漸化式 (RECURRENCE FORMULA) の多項式 (POLYNOMIAL) version の積もりである).

Proof. $p=1$ のときは, 先ほどの Σ_1 の計算から成立している. $p=m$ ($\in \mathbb{Z}^+$) で成立を仮定し, 帰納法による. R_m は $\deg R_m = m-1$ の多項式であり,

$$\Sigma_m = \frac{xR_m(x)}{(1-x)^{m+1}}$$

が成り立つと仮定する. $p=m+1$ の場合を xD -演算により求める. $D\Sigma_m$ を DD により微分すれば

$$\begin{aligned} (1-x)^{2(m+1)} D\Sigma_m &= \begin{vmatrix} 1 \cdot R_m + x \cdot \dot{R}_m & xR_m \\ -(m+1)(1-x)^m & (1-x)^{m+1} \end{vmatrix} \\ &= (1-x)^m \begin{vmatrix} R_m + x\dot{R}_m & xR_m \\ -(m+1) & 1-x \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

この行列式の内部は

$$(1-x)(R_m + x\dot{R}_m) + (m+1)xR_m = (mx+1)R_m + x(1-x)\dot{R}_m$$

であるから,

$$D\Sigma_m = \frac{(mx+1)R_m + x(1-x)\dot{R}_m}{(1-x)^{m+2}}$$

となる.

$$xD\Sigma_m = \Sigma_{m+1} \text{ であるから, } \Sigma_{m+1} = \frac{xR_{m+1}}{(1-x)^{m+2}} \text{ と置けば}$$

$$R_{m+1}(x) \equiv (1+mx)R_m(x) + x(1-x)\dot{R}_m(x)$$

が成り立ち, $\deg R_m = m-1$, $\deg \dot{R}_m = m-2$ であるから, 確かに $\deg R_{m+1} \leq m$ となる. これが等号で成り立つことについては, $R_m(x)$ が $\deg R_m = m-1$ の monic 多項式であることと, $\dot{R}_m$ の主係数が $m-1$ であることから, R_{m+1} の主係数は $m \cdot 1 + (-1)(m-1) = 1$ となり, $\deg R_{m+1} = m$ である.

従って, 任意の $n \in \mathbb{Z}^+$ について多項式 $R_n(x)$ の主係数も 1, つまり $R_n(x)$ が monic な多項式であることも示されたことになる. $\square$

3.2 ちょっと寄り道 — 生成関数とべき級数

さて, すでに我々が Table 1 (p.62) で見たように, べき幾何級数 Σ_n を決定する多項式 $R_n(x)$ の係数 a_k について, 固定された n についてその総和 $\sum_{j=0}^{n-1} a_j$ が $n!$ になることを, 経験的に知っている. 以下, その証明を行なう. これが, 多項式 R_n を生成する漸化式 (RecF-P) (p.63) から, 容易に導かれる系であることが, この漸化式の強力さの証しであると思う.

それに先立ち, 先ほどから暗に用いてきた「形式的」(FORMAL) という用語について, 一言あるべきだと思う. 冒頭で触れたように, 数列 $(a_n)_{n=0}$ が与えられたとき, 有限または無限の長さをもつ多項式 $F(x)$ を次で定める:

$$F(x) \equiv \sum_{n=0} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots.$$

数列 (a_n) が有限列ならば, この $F(x)$ も有限な長さの (つまり普通の) 多項式になるが, (a_n) が無限列ならば $F(x)$ は無限な長さをもつ多項式となる. この無限多項式は, べき級数 (POWER SERIES) とも言われる. その代表例が, 例えば指数関数 e^x の Taylor 展開であろう.

ただし, である. この多項式を「整関数」, 「多項式関数」と考えると, 特に無限多項式のときに困ったことが起きる. もちろん, その無限多項式, 無限級数が「収束するか否か?」である.

例えば数列 $(a_n)_{n=0}$ として $a_n = n!$ としよう. このとき, (a_n) は無限列であるから, 対応する多項式は無限多項式となり,

$$F(x) = 0! + 1!x + 2!x^2 + 3!x^3 + \cdots + n!x^n + \cdots \quad (ad\ infinitum)$$

である. この $F(x)$ は, $x=0$ 以外では一切収束することはないにも関わらず, 形式的べき級数として存在を疑われることはない. この級数について, 我々は解析的な手段によって考察することはできない. にも関わらず, この級数は組合せ論的な数え上げ問題において非常に重要な役目を果している.

従って, このような表現をそのまま「値が定まる関数」を表わす, とするのではなく, 1 つの緩衝材を置いて, 発散してしまう場合にも「代数的操作に関する限り」は意味をもつもの, としてその存在を認めよう, という立場がありうる. たとえば $F(x) := \sum a_k x^k$, $G(x) := \sum b_j x^j$ であれば,

$$F(x) + G(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum (a_i + b_i) x^i$$

と定義することに不満を覚えることはほぼなかろう. $F(x)$ も $G(x)$ も, 発散しているかも知れないにも関わらず, である.

このような見方をするとき, 数学的対象に対して「**形式的**」(FORMAL) な立場をとる, という言い方をする. この立場に立てば, 発散する級数を代数的に扱うことができるようになる. この立場から級数を扱うとき, それは「**形式的べき級数**」(FORMAL POWER SERIES) と呼ばれ, その全体を「**形式的べき級数環**」(RING OF FORMAL POWER SERIES) と呼ぶ. 級数の項が実数であり, 不定元が X であるときには, この環を $\mathbb{R}[[X]]$ で表わす.

今, 「**不定元**」という言葉を用いた. INDETERMINATE の訳語である. これが, 先ほど延べた「洗濯バサミ」の正体である. X は変数ではない. 何故なら, X は値をもたないことがあるからである. $F(X)$ が関数ではない以上, X はその独立変数ではあり得ないことは明らかだろう. 従って, たとえば

$$F(X) = \sum_{n=0}^5 a_n X^n := a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 + a_4 X^4 + a_5 X^5$$

は

$$(a_n)_{n=0}^5 := (a_0 a_1 a_2 a_3 a_4 a_5)$$

と何一つ異なるところはない. 要するに, 形式的べき級数とはリストに他ならないわけである.

少しキチッと定義して置こう. **形式的べき級数** (FORMAL POWER SERIES) とは,

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

であり, ここで列 $(a_n)_{n=0}^\infty$ は**係数列** (SEQUENCE OF COEFFICIENT) と呼ばれる. 2 つの級数が等しいとはそれらの係数列が等しいことである.

2 つの級数について, 和と差は, 項ごと, つまり係数ごとの和と差として自然な形で定義される. 積は **Cauchy の畳み込み積** (CAUCHY'S CONVOLUTION PRODUCT)

$$\sum a_n x^n \cdot \sum b_n x^n = \sum c_n x^n, \quad c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j$$

による.

ある級数 $F(x)$ が

$$F(x) = \sum a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

であるとき, $f(x)$ はその係数列として定まる数列 (a_n) の**生成関数** (GENERATING FUNCTION) と呼ばれる. このとき, $F \xleftrightarrow{\text{ops}} (a_n)$ と書かれ, 級数 F は列 (a_n) の**(定常型) べき級数生成関数** ((ORDINARY) POWER SERIES GENERATING FUNCTION) であると読まれる (“ORDINARY” という形容は, 他にも「指数関数

型」(exponential) な生成関数もあるからだが, ここでは無視してよい). つまり $F \xrightarrow{\text{ops}} (a_n)$ とは $F(x) = \sum a_n x^n$ が成り立つことに他ならない.

生成関数については, まだまだ触れるべき興味深い内容があるが, この辺までにして置こう. この辺については, H. S. Wilf: *Generatingfunctionology* ([Wil06]) という面白い書籍がある. T-shirts と洗濯バサミの例は Wilf によるものである. Wilf は先日亡くなったが, 彼の web page は保存されており, そこから free で download 可能なはずである.

3 つほど, Guide Quizz を差し上げよう. いつもやってることと同じじゃないか?! と思えば, **それが三ム主義の勝利なのだ!**

Guide Quizz

次の関数はそれぞれメチャメチャ重要な数列の生成関数です. その数列を答えて下さい.

(A) $F(x) = (1+x)^n$. n 次を越える項の係数は 0 とする.

(B) $G(x) = \frac{1}{1-x}$.

(C) $H(x) = \frac{1}{1-x-x^2}$.

この Guide Quizz のお陰で, 級数の値を求めることと生成関数の関係が極めて見やすくなる. 数列 (a_n) の生成関数が $F(x)$ であるとき, つまり $F \xrightarrow{\text{ops}} (a_n)$ であるとき, 級数 (の値) $\sum a_n$ は **(それが収束する限りで)** $F(1)$ を求めれば済むからである. 例えば この Guide Quizz (A) については, 級数 (の値) は 2^n であり, (B) は $1/0$ となり発散, (C) は $H(1) = -1$ となるが, これは明らかに矛盾するから発散する.

この辺こそが, 生成関数論が有用であることの証拠なのだろう.

我々は既に経験的に Table 1 (p.62) において, 横に並んだ係数の和が各行について $n!$ であることを知っている. 例えば $p=5$ の行には $(1, 26, 66, 26, 1, 0)$ があるが, これは $\Sigma_5 = xR_5(x)/(1-x)^6$ について,

$$xR_5(x) = x + 26x^2 + 66x^3 + 26x^4 + x^5$$

であることを意味した. この式を, 6 次を越える項の係数はすべて 0 であると約束して, 形式的べき級数 $R_5(x) = \sum a_k x^k$ と考えよう. これによって, 求めたい和 $\sum a_k$ は $R_5(1)$ である.

この考え方と, 多項式についての漸化式 (RecF-P) (p.63) を合わせると, 和 $\sum a_k$ はその系として容易に得られる.

Corollary 3.2 多項式 $R_n(x) = \sum a_k x^k$ について, その係数の和 $\sum a_k = n!$ が成り立つ.

Proof. n に関する帰納法による. $R_1(x) = 1$ であるから, $1!$ に等しく成り立つ. n で成立を仮定する:

(IH) $R_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}$ について $\sum_{j=0}^{n-1} a_j = n!$.

n のとき, $R_{n+1}(x)$ は n 次の多項式であり, それを

$$R_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n$$

とすると, 求める和は $R_{n+1}(1) = \sum_{j=0}^n b_j$ である. 漸化式 (RecF-P) (p.63)

$$R_{n+1}(x) = (1 + nx)R_n(x) + x(1 - x)\dot{R}_n(x)$$

に $x = 1$ を代入すれば

$$\begin{aligned} R_{n+1}(1) &= (1 + n)R_n(1) + 1 \cdot 0 \cdot \dot{R}_n(1) \\ &= (1 + n) \cdot n! \quad (\text{because (IH)}) \\ &= (n + 1)! \end{aligned}$$

となり, このときも成立する. □

これで, 考えている $R_n(x) = \sum b_j x^j$ の係数列 $(b_j)_{j=0}^{n-1}$ についても, その総和公式

$$\sum b_j = n! \tag{5}$$

が成り立つことが示された.

3.3 $R_n(x)$ の係数の決定 — Main Theorem 2.

まず, kymst の導いた定理を挙げ, 例をいくつか挙げてから, その証明を行なおう.

Theorem 3.3 ($R_n(x)$ の係数についての漸化式 — MAIN THEOREM 2 BY kymst.)

$\Sigma_n = xR_n(x)/(1 - x)^{n+1}$ について, $\deg R_n = n - 1$ なる $R_n(x)$ を

$$R_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}$$

とする.

$\Sigma_{n+1} = xR_{n+1}(x)/(1 - x)^{n+2}$ として $\deg R_{n+1} = n$ であり, $R_{n+1}(x)$ を

$$R_{n+1}(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n$$

とすれば, この係数 b_k は

$$\begin{cases} b_0 = a_0 = 1, \quad b_n = a_{n-1} = 1, \\ b_k = (n - k + 1)a_{k-1} + (k + 1)a_k \quad (k = 1, 2, \dots, n - 1) \end{cases} \tag{RecF-C}$$

により定まる.

証明に入る前に, 小さな値について確かめておこう.

I. $n = 3$ から $n = 4$ に進む場合を考えよう. $\Sigma_3 = \sum k^3 x^k = xR_3(x)/(1-x)^4$ について, $R_3(x) = 1 + 4x + x^2$ であることを既に我々は知っている. つまり $a_0 = 1, a_1 = 4, a_2 = 1$ である.

$\Sigma_4 = \sum k^4 x^k$ について, $\deg R_4 = 3$ であるから, $R_4 = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3$ とすることができ. 先ほど導いた R_n についての漸化式 (RecF-P) (p.63) により直接計算してみると,

$$\begin{aligned} R_4(x) &= (1 + 3x)R_3(x) + x(1-x)\dot{R}_3(x) \\ &= (1 + 3x)(1 + 4x + x^2) + x(1-x)(4 + 2x) \end{aligned}$$

について, 定数項は 1, 1 次係数は 11, 2 次係数は 11, 3 次係数は 1 である.

導いた漸化式 (RecF-C) で $n = 3$ とすると,

- $k = 0, 3$ については $b_0 = b_3 = 1$,
- $k = 1$ のとき $b_1 = (3 - 1 + 1)a_0 + (1 + 1)a_1 = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 = 11$,
- $k = 2$ のとき $b_2 = (3 - 2 + 1)a_1 + (2 + 1)a_2 = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 1 = 11$

となり, 上の結果に一致する.

II. もう 1 つ, $n = 4$ から $n = 5$ に進む場合を考えてみよう. $\Sigma_4 = xR_4(x)/(1-x)^5$ について, $R_4(x) = 1 + 11x + 11x^2 + x^3$ であるから, $a_0 = 1, a_1 = 11, a_2 = 11, a_3 = 1$ である.

$\Sigma_5 = xR_5(x)/(1-x)^6$ について, $R_5(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_4x^4$ とする. (RecF-C) において $n = 4$ として

- $b_0 = a_0 = 1, b_4 = a_3 = 1$ は明らか;
- $k = 1$ として, $b_1 = (4 - 1 + 1)a_0 + (1 + 1)a_1 = 4 \cdot 1 + 2 \cdot 11 = 26$;
- $k = 2$ として, $b_2 = (4 - 2 + 1)a_1 + (2 + 1)a_2 = 3 \cdot 11 + 3 \cdot 11 = 66$;
- $k = 3$ として, $b_3 = (4 - 3 + 1)a_2 + (3 + 1)a_3 = 2 \cdot 11 + 4 \cdot 1 = 26$

となる.

これは, Table 1 (p.62) に一致し, このときも漸化式 (RecF-C) は正しい.

では, 一般の場合について漸化式 (RecF-C) が成り立つことを示そう.

Proof. $\Sigma_n = \sum k^n x^k = xR_n(x)/(1-x)^{n+1}$ について, $\deg R_n = n - 1$ であるから, これを

$$R_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$$

とする. このとき,

$$\dot{R}_n(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + (n-1)a_{n-1}x^{n-2}$$

である. R_n についての漸化式 (RecF-P) (p.63)

$$R_{n+1}(x) = (1 + nx)R_n(x) + x(1-x)\dot{R}_n(x)$$

の右辺は

$$\begin{aligned} &(1 + nx)(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}) \\ &+ x(1-x)(a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + (n-1)a_{n-1}x^{n-2}) \end{aligned}$$

となる. これは n 次以下の多項式になるから, $b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n$ と置くことができる.

まず, 定数項は $b_0 = a_0$ であること, また主係数は $b_n = na_{n-1} + (-1)(n-1)a_{n-1} = a_{n-1}$ であることは明らかである.

次に, k 次 (ここで $k = 1, 2, \dots, n-1$) の項について,

$$\begin{aligned} b_k &= a_k + na_{k-1} + ka_k - (k-1)a_{k-1} \\ &= (n-k+1)a_{k-1} + (1+k)a_k \end{aligned}$$

となるから, このときも漸化式 (RecF-C) は正しい. □

さて, かなりチマチマした漸化式の導出とその証明が続いたが, 次の系の証明を見る限りで, この導出も無駄ではなかったことを解ってもらえると思う. 一般に, 多項式 $f(x)$; $\deg f = m$ が**相反性** (RECIPROCITY) をもつ, **相反多項式** (RECIPROCAL POLYNOMIAL) である, とは,

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

について, $a_0 = a_n, a_1 = a_{n-1}, \dots$, つまり $i+j = n$ なる i, j について $a_i = a_j$ が成り立つことである.

$R_n(x)$ が相反性をもつことを, 次数 $\deg R_n$ に関する帰納法により示そう.

Corollary 3.4 ($R_n(x)$ の相反性) 多項式 $R_n(x)$ は monic な相反多項式である.

Proof. まず, $R_2(x) = 1 + x$ であるから, 確かに系が成り立つ.

いま

$$R_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-1}x^{n-1} \quad (a_0 = a_{n-1} = 1)$$

が相反多項式であるとする. $\mu = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ として

$$(IH) \quad a_1 = a_{n-2}, a_2 = a_{n-3}, \dots, \begin{cases} a_\mu = a_{\mu+1}, & n: \text{even}; \\ a_{\mu-1} = a_{\mu+1}, & n: \text{odd}. \end{cases}$$

このとき, $\deg R_{n+1} = n$ である多項式 $R_{n+1}(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n$ について, 漸化式 (RecF-C) により

$$b_k = (n-k+1)a_{k-1} + (k+1)a_k \tag{6}$$

において, 示すべきことは $b_{n-k} = b_k$ が $k = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ について成り立つことである. (6) において k を $n-k$ に代えると,

$$\begin{aligned} b_{n-k} &= (n-(n-k)+1)a_{n-k-1} + (n-k+1)a_{n-k} \\ &= (k+1)a_{n-k-1} + (n-k+1)a_{n-k} \end{aligned} \tag{7}$$

となる. ここで (IH) により $R_n(x)$ が相反性をもつことから,

$$a_{n-k-1} = a_k, \quad a_{n-k} = a_{k-1}$$

が成り立ち, (7) の右辺は

$$b_{n-k} = (k+1)a_k + (n-k+1)a_{k-1}$$

となる. これは漸化式 (6) の右辺に一致することを意味するから, $b_k = b_{n-k}$ が成り立ち, 多項式 $R_{n+1}(x)$ も相反性をもつことが示された. $\square$

さて, ここで一段落である. 多項式 $R_n(x)$ について, かなりの線まで追い詰めることに成功したと思う. しかし, 次の問い掛けに答えられないのでは, ここからの話は面白くない. その問いとは.....

我々が追い詰めた多項式 $R_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$ とは, 数列 $(a_k)_{k=0}^{n-1}$ の何なのか?

である. 結局, 我々は何をしたのか? *Guide Quizz* (p. 66) の (A) の答えが解っていれば, それと同じである. 次の式を見たことがない, とは言わせない:

$$F(x) = (1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + \binom{n}{n}x^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}x^k.$$

これは, $F(x) = (1+x)^n$ が 2 項係数からなる数列の各項を係数にもつことを意味する. つまり $F(x)$ は数列 $\left(\binom{n}{k}\right)_{k=0}^n$ を生成する関数, 生成関数なのである. 干される T-shirts には 2 項係数が書かれていて, それを洗濯竿に干す洗濯バサミが x^n という訳である. $F(x) \xleftrightarrow{\text{ops}} \left(\binom{n}{k}\right)_{k=0}^n$ である. だから, *Quizz* の正解は (A): 2 項係数の列, である (ちなみに, (B) は初項 1, 公比 x の幾何数列 $(x^k)_{k=0}^\infty$ の生成関数, また (C) は Fibonacci 数列 $(f_k)_{k=0}^\infty$ の生成関数, である. (B) と (C) については, いずれも分子を分母で割れば目に見える).

さて, では我々が格闘してきた多項式 $R_n(x)$ は何か? $R_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$ であった. これは数列 $(a_k)_{k=0}^{n-1}$ の生成関数そのものではないか!! そうなのだ! S が「気が済んだ」 Σ_{12} とは, 係数数列 $(a_k)_{k=0}^{12}$ を生成する関数 $R_n(x)$ を明示的な形で求めた, ということに他ならない.

この観点から見ると, 漸化式 (RecF-P) (p. 63) とは生成関数 $R_n(x)$ の関数漸化式であり, また漸化式 (RecF-C) (p. 67) とは, この生成関数 R_n の係数, つまりは R_n が生成する数列の項の決定, すなわち数列の決定, 以外の何ものでもない.

4 Program by hiro san

以下は, 慶應義塾大学の廣くんによる, この Eulerian coefficient の EmacsLisp による計算 program である. Emacs が手元にある方は, 是非試してみて欲しい.

Wed Jun 15 19:00:35 2016 JST

4.1 Program on Emacs-Lisp

```
(defun PolySum (x y)
```

```
(if (or (null x) (null y))
    (append x y)
    (cons (+ (car x) (car y))
          (PolySum (cdr x) (cdr y)))))

(defun ScalMul (k x)
  (if (null x) nil
      (cons (* k (car x)) (ScalMul k (cdr x)))))

(defun PolyMul (x y)
  (if (or (null x) (null y)) nil
      (PolySum (ScalMul (car x) y) (cons 0 (PolyMul (cdr x) y)))))

(defun DifPoly (x)
  (if (null (cdr x)) nil
      (PolySum (cdr x) (cons 0 (DifPoly (cdr x)))))

(defun Rn (n)
  (if (= 0 n) '(1)
      (PolySum (PolyMul (cons 1 (cons (1- n) ()))) (Rn (1- n)))
      (PolyMul '(0 1 -1) (DifPoly (Rn (1- n))))))

(Rn 13) ; => (1 8178 1479726 45533450
              423281535 431879684 127688356 431879684
              423281535 45533450 1479726 8178 1 0)

(defun an (n)
  (if (= 1 n) 0
      (+ (* 2 (an (1- n))) n -1)))
(an 13) ; => 8178
```

一つ一つの関数の意味は... **本人に質問すること!!**

4.2 EmacsLisp とスーパージェッターについて

EmacsLisp については, 広瀬 雄二 著『やさしい Emacs-Lisp 講座』[広瀬 11] が学びやすい. ひとりでも多くの Emacs-Lisper が Group Epsilon に産声をあげることが祈りたい.

声をそろえて, 次を「スーパージェッター」のメロディーで歌おう!!

科白「ぼくは Lisper
半世紀の過去から時の流れを忘れてしまった.
Emacs 応答せよ, Emacs.
起動したな (かなり遅いけど...). よし行こう。」

♪ array の国からやって来た
car と cdr と cons の子
進め Lisper compiler 碎け
走れ interpreter まっしぐら
マッハ 15 のスピードだ
Lisper Lisper Ossan-Lisper
我らの Ossan-Lisper.

「スーパージェッター」については

- 概要: <https://ja.m.wikipedia.org/wiki/スーパージェッター>,
- 主題歌の歌詞: <http://j-lyric.net/artist/a04bc64/10047>,
- 音声: <https://www.youtube.com/watch?v=FTI3e0735MQ>

を参照して, 研究されたい.

5 Acknowledgement

この小さな document を, お世話になっている NCGM の多くのお医者さん, 看護師さんに捧げたいと思います. 毎日, kymst を勇気付けてくれています.

References

- [Rio60] John Riordan. *An Introduction to Combinatorial Analysis*. Princeton U. P., 1960. orig. 1958 John Wiley & Sons, Inc.
- [Wil06] Herbert S. Wilf. *Generatingfunctionology*, 3rd ed. A K Peters, 2006. ISBN: 9781568812793, 2nd ed. on web. <http://www.math.upenn.edu/~wilf/>.
- [広瀬 11] 広瀬雄二. 改訂版 やさしい Emacs-Lisp 講座. カットシステム, 2011. ISBN: 9784877832711.
- [山下 11a] 山下 弘一郎 (kymst). 3 次の正方行列. 2011. <http://kymst.net/index.php, file: mjkNSA02bt1.pdf>.
- [山下 11b] 山下 弘一郎 (kymst). 行列と可換性. 2011. <http://kymst.net/index.php, file: mjk06bt1.pdf>.
- [山下 11c] 山下 弘一郎 (kymst). 数学は i にあふれて. 2011. <http://kymst.net/index.php, file: mjk01bt1.pdf>.

Acta Epsilonica

Volume 1, Number 3, Pages 73–77.

Received: March 28th, 2016, Accepted: April 29th, 2016.

Aleph 2016 / Group Epsilon Meeting 2016 #2 開催報告

田中未来 *

1 はじめに

去る 2016 年 3 月 13 日に Aleph 2016 が開催された。Aleph 2016 はわれわれ Group Epsilon の 2016 年の 2 回目の集会でもあった。この集会の様子を振り返る前に Aleph 2016 に至るまでの Aleph series の歴史を紐解いてみようと思う。

事の発端は 2012 年に Z 会新宿教室で開催された M3 $\aleph$ という特別講座である。この特別講座の趣旨は、“最先端の研究者が何を考え、何と戦い、何に悩み、何を面白がり、何を解決しているのか聞いてみよう” というものであった。M3 $\aleph$ という愛称は Z 会東大マスターコース (当時) の講座記号を踏襲したもので、受験生を対象とした数学の講座という意味の “M3” に、Latin alphabet を超えた無限の広がりを感じさせる文字として、Hebrew alphabet の $\aleph$ (aleph) を付加したものだと思われる。これらのことについては M3 $\aleph$ 発起人である山下さんによる説明 [1] に詳しい。

2 年後、同様の集会 Aleph 2014 が開催された。愛称から “M3” の文字が消えたことから、受験生以外も対象とすることで門戸を広げ、必ずしも話題を数学に限定せずにより広い学問領域を扱っていこうという意図が感じられる。このような集会を継続的に実行していくための集団として Group Epsilon が結成されたことは Group Epsilon の Wiki [2] にも書いたとおりだが、実際に Group Epsilon のメンバーの年齢は大学生からシニアまで、専門領域は数理科学、自然科学、情報科学、人文社会科学と幅広くなっている。

その後、はじめて Group Epsilon が主催した Aleph 2015 が開催され、今回の Aleph 2016 に至る。後で振り返るように Aleph 2016 でのそれぞれの講演は M3 $\aleph$ の趣旨を踏襲したものとなっていたように思う。一方で、今回の Aleph 2016 では、全体を通してのテーマを “大学は象牙の塔か？ 真の知性とはなにか?!” とし、“大学で身につけるべき真の知性とはなにか” という問いを参加者に投げかけた。ここでの象牙の塔とは、現実から逃避するような学者の生活や大学の研究室などの閉鎖社会のことを意味する。大学という学問の森に入って多くの学問領域に触れ、それぞれの学問領域を見上げてみると、それは現実と大幅に乖離した象牙の塔に見えるかもしれない。また、学問の森はその象牙

* Aleph 2016, Group Epsilon Meeting 2016 #2 実行委員長, 東京理科大学, mirai@rs.tus.ac.jp.

の塔が林立するような空間のように感じられるかもしれない。—果たして本当にそうなのか? 各講演を聴くことで省みる。それが Aleph 2016 全体としての意図であった。

—前菜が多すぎた。各講演を振り返っていこう。

2 情報科学のすすめ (戸神星也)

最初の講演は戸神さんによる“情報科学のすすめ”である。この講演の前半では、フカシギお姉さんのあの動画 [3] から入り、アルゴリズムと計算量理論の解説が行なわれた。この動画を観たことのない方はぜひご覧になってほしいのだが、おおむね次のような (インパクトの強い) 内容である。

フカシギお姉さんと呼ばれる女性は、どういうわけか、無向グラフとその 2 頂点が与えられたときに、それらを始点と終点とするような路の数え上げを行ないたいらしい。フカシギお姉さんは素朴なアルゴリズムで数え上げを行なうのだが、素朴なアルゴリズムでは計算量が爆発してしまう...

ちなみに、ZDD と呼ばれるデータ構造を用いたアルゴリズムでは少ない計算量で数え上げが可能となる (詳細は書籍 [4] を参照されたい)。動画の紹介の後、“名簿から特定の名前を検索する”という重要性が比較的わかりやすい問題を例に、アルゴリズムの計算量の入門的な解説が行なわれた。講演の後半では電王戦や Alpha Go などで注目を集めているゲーム情報学の解説や戸神さんの卒業論文 [5] の内容の紹介が行なわれた。

この講演では情報科学の重要性や面白さ、そして大変さが、戸神さん自身の経験をもとに語られた。また、情報科学という学問領域と数学との関係性についても示唆があったように思う。人工知能という窓を通してそもそも知能とはなにかということに関心を持った参加者もいただろう。

3 半導体から学ぶ電子回路の世界 (隅田圭)

2 番目の講演は隅田さんによる“半導体から学ぶ電子回路の世界”である。この講演の前半では、半導体の材料的性質から入り、それを応用したトランジスタの原理について初学者にもわかりやすく解説された。私もこの手の話は大学で聞いたことがあったのだが、そのときよりもはるかにわかりやすかったように感じた。このような講演が大学 2 年生によってなされたことは驚異的である。

講演の後半では、電子回路の設計について解説がなされた。トランジスタを複数組み合わせることにより多様な演算が可能となるということが例を用いて述べられた。このことは“論理回路の完全性”と呼ばれているようだ。証明は時間の都合から割愛されたが、証明の概略は深津さんによる quick review [6] にあるので、興味のある方はご覧いただきたい。この辺りについて事実と重要性を述べるに留めて証明を割愛したのは、高校生の参加者も多い Aleph series では良い判断であったように思われた。

全体を通していえば、電気電子工学の面白さや state of the art が伝わってくるような講演だったといえるだろう。また、材料科学や数理・情報科学との関わりについて関心を持った参加者もいたの

ではないかと思う。ちなみに、私自身は所望の電気回路を少ないトランジスタの個数で実現することができると(製造コストはともかく)性能的には良いのではないかという問題意識を持った。他の参加者の問題意識にどのようなものがあるか、共有する機会があると面白いかもしれない。

4 19 世紀解析学研究 (1) Cauchy における無限小概念 (山下弘一郎)

3 番目の講演は山下さんによる“19 世紀解析学研究 (1) Cauchy における無限小概念”である。*Acta Epsilonica* の読者の多くが知っているように、山下さんはすい臓と胆管のがんと闘いの真只中であり、私は彼の言うとおりに講演者略歴に“3 月をもって正規に退職。教壇を去る”と書いた。その山下さんがチョークを持ち、“復帰するつもり”と言ったことは、驚くべきちゃぶ台返しであった。それにとどまらず、彼の講演では、さらなるちゃぶ台返しの計画が語られた。

現在の解析学の教程では、最初に集合と位相を学び、次に極限、そして微分、最後に積分という順序となっている。その結果、無限小などの概念はいわゆる ε - δ 論法を用いて記述され、無限小量という実体そのものを扱うということは一般的ではない。このような実体を用いて現在の解析学を書き換えようとする試みが超準解析と呼ばれる学問である。しかしながら、発見ないしは開発された歴史はこれらの逆である。この歴史の流れの中で Cauchy は ε - δ 論法を導入し、無限小量という(少なくとも現在のわれわれにとっては)気持ち悪いモノを排除し、解析学を(少なくとも現在のわれわれにとっては)理論的に精緻化したということになっている。このような背景の下、Cauchy の *Cours d'analyse de l'École royale polytechnique* を紐解く。山下さんのちゃぶ台返しの計画というのは、Cauchy はこのときすでに超準解析のような考え方をすでに持っており、この著書の中で Cauchy がやりたかったことは、“無限小量という実体を排除して解析学を精緻化させること”ではなく、“無限小量という実体を用いた解析学を論理的に体系づけること”だったという説を提唱するというものである。

現時点ではこの説に対する確固たる裏付けはないように思われるので、“19 世紀解析学研究 (n)” ($n \geq 2$) を楽しみにしたい。もし仮に、たとえ山下さんの説が間違いであったとしても、その過程の中で Cauchy が何を考え、何と戦い、何に悩み、何を面白がり、何を解決(しようと)したのかが明らかになるはずである。それらがわれわれに与える示唆ははかりしれないものがあるだろう。

5 制御理論のプロムナード —古典からポストモダンまで— (石川 徹也)

最後の講演は石川さんによる“制御理論のプロムナード —古典からポストモダンまで—”である。石川さんの講演では、古典制御と現代制御が簡単な例題を用いて解説された。また、最先端の理論であるロバスト制御についても簡単に紹介があった。講演の様子は苅田さんの quick review [8]にあるので詳しくは割愛するが、線形代数や関数解析などの数学的道具の制御理論における重要性が見えてくる講演であったように思う。なお、講演で割愛された linear quadratic regulator に関する証明は、今後 *Acta Epsilonica* に投稿する予定とのことなので、興味を持った参加者は楽しみに待つ

て欲しい。

石川さんの講演は異文化交流の重要性を説くことで締めくくられた。曰く、制御だけでは役に立たず、制御する対象の知識がなければ技術革新は望めない——これは、最適化を専門とする私も深く共感するところである。心理学者の Lewin による、“理論なき実践は盲目であり、実践なき理論は空虚である”という言葉がズバリ言い当てている。制御や最適化はなんらかの対象を制御したり最適化したりするための数理的な技術であって、決してそれそのものでは現実の役には立たない。制御や最適化の理論研究のような塔を高くするような研究も重要だが、実対象への応用のような塔と塔とを結ぶ橋を架けるような研究もそれと同じくらい重要である。

一方で、自らの拠り所となる塔を持たない限り、高みを目指すことはできない。情報学者の Han によると、“理論は時には実践を一挙に凌駕する遙か彼方の地平に我々を着地させる”であり、石川さんも“異文化交流によって技術革新をもたらすためには自分の専門分野に精通することが必要である”と述べている。

6 おわりに

今回の Aleph 2016 では高校生の参加者が期待より少なかったものの、多くの参加者にご来場いただいた (図 1)。4 つの塔を皆で見上げてみることで、それぞれの塔やそれらの間の雰囲気、あるいは塔と塔とを結ぶ橋の重要性が少しでも参加者に伝わったとすれば、Aleph 2016 は成功だったと言えるだろう。なお、Aleph 2016 は 4 名の講演者の他にも、副実行委員長の久保田さん、運営委員に名乗り出てくれた滝脇さん、坪井さん、古澤さん、荻田さん、深津さん、杉浦さん、運営委員には名乗り出なかったけれども当然のごとく八面六臂の活躍をしてくれた控え目な杉ノ内さんの尽力があってこそ開催できたものである。心より感謝したい。

参考文献

- [1] 山下弘一郎: Invitation to Special Event M38, <http://kymst.net/aleph2012/alephPph02.pdf>.
- [2] Group Epsilon: Group Epsilon Wiki, <http://kymst.net/index.php?GrpE/index>.
- [3] MiraikanChannel: フカシギの数え方 — おねえさんといっしょ! みんなで数えてみよう!, <https://www.youtube.com/watch?v=Q4gTV4r0zRs>.
- [4] ERATO 湊離散構造処理系プロジェクト: 超高速グラフ列挙アルゴリズム —〈フカシギ〉の数え方が拓く, 組合せ問題への新アプローチ—, 森北出版, 2015.
- [5] 戸神星也: 数独の解生成と解に対する番号付け, 東京工業大学理学部情報科学科卒業論文, 2007, http://kymst.net/sudoku_test/doc/SUDOKU_Index.pdf.
- [6] 深津龍一: Quick review: 半導体から学ぶ電子回路の世界, <http://kymst.net/index.php?plugin=attach&refer=GrpE/Aleph2016&openfile=fr1revsumita.pdf>.
- [7] 山下弘一郎: 19 世紀解析学研究 (1) Cauchy における無限小概念, <http://kymst.net/index>.



図 1 会場の様子.

<http://kymst.net/index.php?plugin=attach&refer=GrpE/Aleph2016&openfile=anls1901abstV01.pdf>.

- [8] 荻田裕也: 2016 Aleph Review: 制御理論のプロムナード —古典からポストモダンまで— (石川徹也さん), <http://kymst.net/index.php?plugin=attach&refer=GrpE/Aleph2016&openfile=Review4.pdf>.

編集後記・編集部からのお知らせ

滝脇知也*



早いもので前回の発行から3か月たった。3月の初旬の段階では進路が決まっていなかった人も行く先がきまり、それぞれの場で奮闘していることだろう。梅雨の時期で天気が悪いのは残念ではあるが、ここに *Acta Epsilonica* をお届けできることを嬉しく思う。

原稿に関しては今回も学術的に価値の高い記事が集まっている。知的好奇心を存分に刺激する内容で面白い。ただし、本雑誌の目指すところとしては、それだけでは物足りない。皆さんユーモアに富んだエッセイも募集中である。良いネタが思い浮かんだらぜひ投稿して欲しい。編集部でも原稿を準備中で、次の号ではお見せできるだろうと思われる。ご期待いただきたい。

前回の *Acta Epsilonica* の発行から今回の間に Group Epsilon では2016年の3rd meetingが行われた。続いて行われる4th meetingにてこの *Acta Epsilonica* は配られることになっている。これらのmeetingでは、運営面においても発表面においても若手の活躍が目覚ましかった。健全な世代交代は喜ばしい。

もう一つ喜ばしいのはこの *Acta Epsilonica* の主筆である山下弘一郎さんの病状が回復に向かい、力が入った記事を投稿してくれたことである。科学者としてはあまり運や奇跡という概念に頼りたくはないが、そういったものに感謝したい気持ちでいっぱいである。微力ではあるが、これからも応援を続けていきたい。

Acta Epsilonica の編集としては良いことばかりがあったわけではない。査読結果を返すの

が遅れたり、修正した原稿が添付されたメールを見逃して、査読者に送るのが大幅に遅れてしまったりした。Vol. 1, Nos. 1-2の発行がうまくいったため油断したのかもしれない。この場を借りて関係者にはお詫びしたい。再発防止のために投稿システムや連絡のシステムを改善するのが急務である。

雑誌の編集は創めることより続けることのほうが難しいのだろう。最初の気合と良い意味での緊張感は、慣れてくると容易に油断と慢心に変わってしまう。高い意識の継続が我々編集部の次の課題になるだろう。今回のように発行の日の間近に編集長に大きな負担がかかるのはなんとしても避けたいところである。

最後に体制の変更をお知らせしたい。本号から編集部には佐々木惟子さんが加わった。我々に足りないセンスを補ってくれると期待している。この新体制で準備している次回の *Acta Epsilonica* も引き続きご期待いただければ幸いである。

主筆 山下弘一郎

編集長 田中未来

編集長補佐 滝脇知也

編集協力・美術監督 久保田栄一

編集委員 佐々木惟子

* 国立天文台, takiwaki.tomoya (at) nao.ac.jp.

TABLE of CONTENTS

• 田中未来	
Gunstar-Epsilon	表紙
• 山下弘一郎	
KOTOBA — ΛΟΓΟΣ — 言葉	37
• 苅田裕也	
統合情報理論の可能性	39
• 山下弘一郎, 廣祥吾	
Sxxxxx -Yamashita's Euler's Triangle	53
• 田中未来	
Aleph 2016 / Group Epsilon Meeting 2016 #2 開催報告	73
• 滝脇知也	
編集後記・編集部からのお知らせ	79

