*Acta Epsilonica*
Volume 1, Number 4, Pages 83–99.
*Received: October 2nd, 2016, Accepted: October 7th, 2016.*

# 数学の構築術

ニコラス・ブルバキ (原著), 山下弘一郎 (訳)

BOURBAKI, NICOLAS: L'ARCHITECTURE DES MATHÉMATIQUES
Translated to Japanese by YAMASHITA, KOICHIRO (`kymst`)
Free Math Forum by `kymst` (FMFk) Webpage: `www://kymst.net`
`mail to -:) kymstkymst@gmail.com`

## Translator's Preface

この document は, 多頭の数学者 Nicolas Bourbaki による論考

NICOLAS BOURBAKI: L'ARCHITECTURE DES MATHEMATIQUES

の翻訳である. 底本としては France のレジスタンスにして数学者 ル・リオネ の編集した

Lionnais, F. Le ed.: *Les grands courants de la pensée mathématique*
Noubeau ed. Albert Blanchard, Paris. 1962.

『数学思想の偉大なる流れ』

の I. Le Temple Mathématique, A — Structures (I. 数学の殿堂 A: 構造) に掲載されている原論文 (pp. 35–47) を用いた.

この論文には英語訳が 2 つ, 邦訳が 1 つある (他の言語に訳されているかも知れないが, そこまでは調べられなかった):

- *American Mathematical Monthly. Official Journal of MAA.*, Vol. 57, No. 4. (Apr., 1950), pp. 221–232 に掲載された Arnold Dresden による英訳: "The Architecture of Mathematics" (これを, 昨年度 Group Epsilon の members, `hiro`, `sngyo` 両君が参加してくれた RASe001 の text として用いた). JSTOR (`http://jstor.org`) から Free Download することができる.
- 原著の英訳: Lionnais, F. Le ed.: *Great Currents of Mathematical Thought.* 2 Vols. (Dover Pub. Inc., 1971. Dover Phoenix Editions, Series.) の Volume 1: Mathematics: Concepts and Development (`ISBN: 0-486-49578-7`) に入っている R. A. Hall による "The Architecture of Mathematics." (pp. 23–36).
- 原著の邦語訳: ル・リヨネ編, 村田全監訳『数学思想の流れ』(全 2 巻, 東京図書, 1974) の第 1 巻 pp. 31–48 に掲載された銀林浩先生による「数学の建築術」(元々は森毅『現代数学とブ

ルバキ』東京図書, 数学新書 No. 66, 1967 の付録として pp. 143–163 に載ったものの改訳である. 尚, Seminar RASe001 の開催中は, `hiro`, `sngyo` 両君にはこの邦訳の存在を隠していた. あくまでも, 内容理解のための教育的配慮であった...... でも, ゴメンナサイ `m(__)m`.).

このように様々な形の翻訳 version が存在するにも関わらず, また自分 (`kymst`) のフランス語についての脆弱さにも関わらず, 更に新たな訳稿のための作業に踏み切った最大の理由は, 邦語訳が掲載されている邦書がいずれも絶版であることである.

年がバレルが (... とっくにバレテイルが), 1960 年代, 70 年代にモノゴコロを得た世代の数学少年にとって, ブルバキは憧れの的だったのである. 森毅先生が教室で口にした「ワカリヨイ, ハギレヨイ, カッコヨイ」という宣伝文句は, 今でも鮮明に耳に残っている.

ブルバキと来れば『数学原論』Bourbaki, N.: *Elements de mathematique.* Ensemble des 25 volumes. Original: 1939—, Reprint: Springer, 2006. の邦語訳が東京図書から公刊され (1960 年代の後半), 学生になる前に書店で手にとって序文を流し読みしたとき, 次の一文に出会った:

> 1. この原論は数学をその第一歩から取扱い, 完全な証明を付ける. したがって, これを読むのに, 原則的には数学的予備知識を全然必要としない. ただ, 多少の数学的推論の習慣と, 多少の抽象能力とが必要なだけである.
> そうは言うものの, この原論は, 少なくとも大学一, 二年次程度の数学知識を持った読者を念頭に置いて書かれている.
> 2. ......
>
> 「読者への注意」冒頭.

「ヤッタ!!」と思った. 「これで数学が解るんだ!」...... なんて純粋 (*i.e.* 単純, ノーテンキ) な心をもった青年であったことか!? ワクワクしながら, 『集合論 I』(前原昭二訳, 東京図書, 1968) を開いた. 『原論』全体の, 内容的な冒頭部分である. 数学全体の初めの初めである. そこにこう書いてあった:

> ある一つの数学的理論 $\mathscr{T}$ で用いる記号には......

「へっ?????」というのが正直なところであった. 丁寧にも, この「理論 $\mathscr{T}$」には註が付けてあった. 曰く

> この表現の意味は, この章の中で, 次第に明らかとなる.
> ......

その後学生になってからは, 文学部哲学科に席を置きつつ, 指導教官の目を盗みながら数学科の授業に出る日が続いた. 最初に盗聴した講義は「数理論理学」であったし, 大学で最初に教壇に立ったのも「論理学」であった. 思えば, この「ある一つの数学的理論 $\mathscr{T}$」と「へっ?????」こそが, 訳者の今を形作っているのかもしれない. ブルバキの言う「大学一, 二年次」というのは, フランスの超エリート大学, École polytechnique や École Normal Suppérier を相手にしていたことを知ったのは,

時代がかなり下ってからのことである.

閑話休題.

次の注意をしておきたい:

- Double Bracket ⟦...... ⟧ は, 意味をはっきりさせるために訳者が入れた補足である.
- もとの仏文の段落はかなり長い. 意味を考えて適当なところで改行を行なった.

編者 ル・リオネ は本書の冒頭にある「内容紹介」(Présentation) において, 自分の企てた本書を「数学の小さな十字軍の試み」(entreprenant cette petite croisade mathématique) と呼んでいる. もしこの十字軍に加わろうとする読者がいれば, たいそう嬉しい.

力不足の訳者 `kymst`, 19:05:08 2016/09/30

## Contents



## 1 1 つの数学か, それとも数学は複数あるのか?

La Mathématique, oú les Mathématiques ?

現在あるがままの, 数学的科学の全体像をここに提示すること, これは, 少し考えただけで, 達成できそうもない仕事に思える. その理由は, 数学の主題とするものの広大さと多様性にある. 他のすべての学問と同様に, 19 世紀の終盤以降, 数学者の人数もかなり増加し, また彼らが行なった数学上の仕事も大量である. 通常の 1 年間に世界中で出版される純粋数学について書かれる論文は, 優に数千ページに及ぶ. もちろんのこと, それらがすべて同等の価値をもつものではない; しかしながら, 瓶の底に溜まらざるを得ないおりを捨て去り, 上澄みだけを飲むことにしたとしても, 事実として, 毎年毎年数理科学は大量の新たな結果により豊かになり続けている. その理論は, 止むことなく分岐し枝状に拡がりつつ, 改変・改鋳を施され, また互いに付き合わされかつ結合しあっている. どのような数学者と言えども, 彼の持てる時間すべてを使い切ったとしても, 数学のこの発展をそのすべて

において理解することは不可能である. 多くの数学者は, 数学というリングの 1 つのコーナーに立てこもり, そこから離れようとはせずに, 自分の主題以外のすべてについてほとんど何も知らないばかりではなく, そうした主題からは離れた分野を専攻している同僚の用いる言語や用語を理解することさえできない. ある数学者がどれ程広範囲に渡る教養を身につけていたとしても, こうした測り知れない数学的世界の中にあって, ある領域において途方に暮れることのないような者はほとんどいないであろう. 例えばポワンカレやヒルベルトのように, 殆んど全ての領域でその天才ぶりを刻印できるような数学者は, 最大級の偉大な数学者の中でも非常にまれな例外なのである.

従って, 専門の数学者がその全体像を把え切れないものについて, その正確な描像を素人に説明するなど, 問題外である. しかしながら, 次を問題にするのは妥当であろう. まず

- 数学の繁茂が拡大するとは, その日々の成長に伴なって, より一層強固な骨組みをもつ組織体になっていく発展に他ならない. そしてその強固さは, 数学が日々体現している強靭な結束と統一性を得ることによる. これは正しいか?
- これとは全く逆に, この拡大は, 数学が漸次的に個々の部分に解体していく過程の外的な徴表に他ならない. そしてそれは, 数学が内在的に有しているその本性そのものに由来するものである. 正しいのはこちらの方か?
- 総じて, 数学の各分野はそれぞれが自立していて, 数学とはそれらからなるバベルの塔になっていくのではないか? そこではそれぞれの分野は, その目的においても, また方法においても, 更には言語においても, 相互に関係を遮断されているのではないか?

一言で言おう: **数学は今日, ただ 1 つ存在するのか, それとも複数の数学が存在するのか? (En un mot, y a-t-il aujourd'hui *une* mathématique ou *des* mathématiques ?)**

もちろん, 今日ほどの顕著さはなかったとしても, この問を新しいものと考えるべきではない. そもそも数学という学問のほとんど成立当初から, この問題はずっと問われ続けてきた. 実際, 応用数学を別にしたとしても, 幾何学と数論との間には, (少なくともその初等的な側面において) その誕生における起源の二重性が存在する. 後者の数論はまずもって**離散的** *discret* なものについての学問であり, 前者幾何学は**連続的** (*continue*) なものについてのそれである. 無理数の発見以降, この 2 つの側面は鋭く対立してきた. 更に, この科学を統一化しようという試み, つまり「万物は (整) 数である」« toutes choses sont nombres » というピタゴラス学派の算術主義が破綻することを示したのは, まさにこの発見なのである.

もし我々が, ピタゴラス以降今日まで, 数学の統一性についての概念がどのように変化してきたか? を追跡するとしたら, 我々のなすべき考察から大きくはずれた遠回りをすることになるだろう. 更にまた, その仕事は数学者よりも哲学者に相応わしいものである. と言うのも, 数学を整合的な全体へと統一しようという試みは, ——プラトンやデカルト, ライプニッツが考えた算術化によるものであれ, あるいは 19 世紀の論理主義によるものであれ——どれも共通な特性を有しているからである. その特性とは, 多かれ少なかれ何らかの野心的な哲学体系と結び付いている, という点であり, 更に, どの場合も, 数学と, 外部世界と心的世界からなる 2 つの宇宙との関係についての, 非経験的 (先験的, *a priori*) な観念から始まっている, という点である. ここでは, この点に関して歴史的およ

び批判的な研究として, Brunschvicq の *Les Étapes de la Philosophie Mathématique*[1] を挙げておくことにする. 我々のここでの目標はより穏やかなものであり, より限定的なものである: 我々は, 数学が実在世界とどう関係するか, また それが思惟の主なカテゴリーとどう関係するかをここで考察することは一切しない. 我々はあくまでも数学領域の内部に留まり, 数学に固有な思考の進め方を分析することをもって, 我々が先ほど立てた問に答えることにしたい.

## 2 論理的形式主義と公理的方法

Formalisme Logique et Méthode Axiomatique

我々が先に挙げた様々な体系が, どれも多かれ少かれ誤っていることが明らかになって, 20 世紀の初頭には, 人々は数学の内に, それに固有な 1 つの目的, 1 つの方法を見出すことをあきらめたように思われる. むしろ数学を「**それぞれがある固有な概念を基にして立てられた, 厳密に範囲が限定された** ⟦複数個存在する⟧ **学問分野の集まり**」« *une série de disciplines fondées sur des notions particulieères, délimitées avec précision* » であって, そのそれぞれは「**数え切れないほどの通信回路**」« *mille chemins de communication* » で結ばれていて, そのおかげで, 1 つの分野に特有な方法を用いて, 他のいくつかの分野を潤すことができるのだ, と考える傾向にあった (先に挙げた Brunschvicg の書物の p. 447 を参照せよ).

今日ではそれとは反対に, 数学の内在的な発展は, その外見とは裏腹に, これまで以上に様々な部分の統一性を緊密なものにしていて, これまでにはなかった程首尾一貫した, 中心にある核を形成しているはずだ, と我々は信じている. この発展の本質は, 様々な数学的理論の内に存在する諸関係の体系化にこそ存するのであり, 一般に『公理的方法』« methóde axiomatique » という名称の下に知られているものに他ならない.

⟦この方法の名前として⟧『形式主義』« formalisme » ないしは『形式的方法』« méthode formaliste » という言葉が用いられることがある. しかしながらまずもって, こういったいい加減な定義しかもたない言葉に起因する混乱の危険から, 自分の身を守ることが重要である: しばしば目にすることだが, この混乱は, 公理主義に対する反対者によって利用されている. すべての人が知っているように, 数学を外から見ればその特徴として, デカルトの言い方を用いれば『推理の長い連鎖』« longue chaîne de raisons » を目にする: すべての数学的理論は命題のなす系列であり, それぞれの命題はそれより手前にあるいくつかの命題から, 論理法則に従って導かれている. ここで言う論理とは, アリストテレス以降『形式論理』« logique formelle » と呼ばれてきたものであり, それぞれの数学者により, その場その場で必要に応じて適切な仕方で採用されるものである. 従って『演繹的推論』« raisonnement déductuf » をもって数学を統一する原理である, という言い方は, 意味をもたない自明なことを繰り返しているにすぎない.

⟦この「論理」をもって数学の特質となすような⟧ 表面的な指摘が, 様々な数学的理論の見た目の複雑さの説明たり得ないのは, 例えばあたかも, 物理学と生物学を, その両方いずれもが経験的方法

[1] Paris. Alcan, 1912.

を採用していることを根拠として, それらを 1 つの科学に統一しようという試みが, まったく妥当でないのと同様である. 三段論法の連鎖からなる推理というのは, あらゆる種類の仮定に一様に適用することを可能にするような変換**装置** un *mécanisme* transformateur 以外ではなく, 従って数学的理論の本性を特徴付けることなど不可能である. 別の言い方をすれば, それは, 数学者が自分の思考に与える外的な**形式** la *forme* extérieure であり, その思考を他の人が消化吸収するための伝達手段[2], つまり一言で言えば数学に相応わしく用意された**言語** *langage* なのである. これ以外の何一つ, その内に探し求められるべきではない.

この言語をコード化すること, つまりその語彙を確定し, その構文論を明示すること, は, 確かに有用な仕事である. それは確かに公理的方法の一面であり, **論理的形式主義** *formalisme logique* と呼ばれる (ある人々はそれを「論理主義」la loqiatique とも呼ぶ). しかしながら, ——ここにこそ我々の主張が凝縮しているのだが——それはあくまでも ⟦公理的方法の⟧ **一面にすぎない** *ce n'en est qu'une face*. それも, 最も興味を引かない一面なのである.

公理論がその本来の目標とするものは, まさしく論理形式主義のみでは達成できないもの, 数学の深奥にある知性, である. ⟦経験的科学における⟧ 経験的方法の出発点は, 自然法則が常態性をもつ, という超経験的 (*a priori*) な信念である. それと同様, 公理的方法を支えてくれる基盤は, 次のように確信することにこそ存する: つまり, 数学が行きあたりばったりに行なわれる三段論法の連鎖でないとすれば, 尚のこと数学は, 純粋に技術的な技巧のみが勝利を納めるような, 偶然の結び付きからなるものでは一切ない.

表面的にしか ⟦数学を⟧ 観察できない人の目から見て, 見た目には全く異なる 2 つないしはそれより多くの理論に, 才能豊かな数学者の手によって, 「思いもよらない援助」(Brunschvicg, *loc. cit.* p. 446) が与えられることがある. このような場合に公理的方法は, こうした発見のより深いところにある理由を探求し, 考察されているいくつかの理論それぞれに固有な, 外的な機構の下に埋めこまれている共通なアイデアを見つけ出し, これらのアイデアを切り出して, それがどのようなものか, を明示してくれるのである.

## 3 『構造』という概念

La Notion de « Structure »

この作業はどのような形で行なわれるのだろうか? まさにここにおいてこそ, 公理論は経験的方法に最も接近するのである. デカルトの哲学を根源とする力を借りて, 公理論もまた「よりよい形で問題を解決するために困難を分割する」« divisera les difficultés pour les mieux résoudre » ことから始める: 公理論はある理論の 1 つの証明において

1. その証明の内に形作られている 1 つの推論を採り上げ, それを作っているいくつもの原理的なば

[2] 更にどんな数学者でも知っていることだが, ⟦証明に現れる⟧ 演繹の一歩一歩のステップが正しいことを確かめただけでは, その証明を本当の意味で「理解した」« compriser » とは言えない. 他のやり方ではなくて, まさにそのやり方, その演繹の連鎖こそが作り上げられる基となったアイデアを明確に納得しようとしてこそ, 本当の意味での理解なのである.

ね仕掛けを**ばらばらに分解する** *dissocier* ことから始める;

2. 次に, それらそれぞれを**個々別々に** *isolément* 採り上げて, その 1 つを抽象的な原理として問題設定することにより, それに固有な帰結を導き出すことを試みる;
3. 最後に, 考察中の理論へと立ち戻り, 先ほどまでバラバラに放たれていた構成要素をもう一度**結合して** *combinera*, それらがどのように影響を及ぼし合うか? を研究する.

以上, 概形として記述された手続きを例示によって描き出してみよう. そのために我々は, 最も古典的な (そして最も単純でもある) 公理的理論として抽象群 « groupes abstraits » の理論を採り上げよう.

例として次の 3 つの操作を考えてみる:

1° 2 つの実数 (正負, またはゼロでもよい) の和が普通に定義された実数の加法;

2°『素数 $p$ を**法とする**整数の乗法. この場合考えられる操作の対象は $1, 2, \ldots, p-1$ という整数であり, これらの内からとられた 2 つの数の『積』« produit »とは, 普通の積を $p$ で割った**剰余** *reste* である;

3° 3 次元ユークリッド空間における変換の『合成』« composition », あるいは変換の『積』« produit ». ここで 2 つの変換 $S, T$ のこの順で考えられた合成とは, ⟦空間の点に⟧ まず $T$ を作用させ, その結果に $S$ を作用させることにより得られる変換として定義される.

これら 3 個の理論のそれぞれにおいて, まず考えられている要素からなる集合から, 2 つの要素 $x, y$ が (この順に) 登場する. 例 1° では実数の集合, 例 2° では整数 $1, 2, \ldots, p-1$ からなる集合, また例 3° ではすべての変換からなる集合である. そして, $x$ と $y$ の対には, 当の理論に固有な操作によって一意的に定まる第 3 の要素が対応する. その第 3 の要素を, ここでは 1° から 3° のいずれの場合にあっても, $x \top y$ と表わすことにしよう (これにより $x \top y$ は 1°: $x, y$ が実数ならば $x$ と $y$ の和, 2°: これらが $p-1$ 以下の正整数ならば「$p$ を法とする」« modulo $p$ » 積 ⟦以下, これを mod $p$ と略記する⟧, 3°: もしこれらが変換であるならば, それらの「合成 (変換)」« composé », である).

さて, それぞれの『演算』« opération » の性質をこれら 3 つの場合について調べてみると, ⟦それらの間に⟧ 注目すべき平行性を見て取ることができる. ただしこれらの性質は 3 つの理論それぞれの内部において相互に独立であり (つまり, それらのいずれもが他の性質を論理的な帰結とすることはない), それらの論理的な関係は少数の独立な性質を単離することに導かれる. 例えば[3] 我々は, 次の 3 個の命題を採り上げ, それら 3 個の命題をすべてに共通な記号表記により表現してみよう. これらの記号表記は, もとの ⟦それぞれの理論ごとの⟧ 特別な言語へといつでも容易に翻訳可能なものである:

a) 任意の 3 個の要素 $x, y, z$ について,

$$x \top (y \top z) = (x \top y) \top z$$

[3] この 3 個の命題を選ぶことに何ら絶対 ⟦的必要⟧ 性があるわけではない. 実際, 我々がここで表示したものと『同値』« equivalent » であるような数多くの公理系が知られている. それらそれぞれの公理系をなす公理の言明は, 他のいずれの公理系にあっても, それが含む諸公理の論理的帰結となる.

が成り立つ (演算 $x \top y$ は『結合的』« associativé »である.)

b) ある要素 $e$ が存在して, 任意の要素 $x$ について

$$e \top x = x \top e = x$$

が成り立つ (1°: 実数の加法ならばそれは数 0 である; 2° : mod $p$ での乗法ならばそれは数 1 である; 3°: 変換の合成の場合には, それは固定された空間のすべての点をその場所に保つような「恒等」変換 déplacement « identique » である ⟦この特別な元 $e$ は「恒等元」,「単位元」« identité », « élément identique » と呼ばれる⟧.

c) 任意の要素 $x$ についてそれぞれある要素 $x'$ が存在して

$$x \top x' = x' \top x = e$$

が成り立つ (1°: 実数の加法ならば $x'$ は $x$ の反数 $-x$ である; 3°: 変換の合成の場合には, $x'$ は $x$ の「逆」変換 (déplacement « inverse ») である. つまり $x$ によって動いた点をすべてそのもとの位置に戻すような変換である; 2°: mod $p$ における乗法の場合には, $x'$ の存在は初等的整数論から直ちに導かれる[4] ⟦$x$ ごとに定まる元 $x'$ は $x$ の『逆元』« élément inverse » と呼ばれる⟧).

従って次が理解できる. 即ち, 3 つの理論すべてにおいて, この ⟦"$x \top y$" という⟧ 共通な記法によって同じやり方で記述され得るどんな性質も, 3 個の命題 ⟦つまり公理 a), b), c)⟧ から導かれる帰結である, ということである. 例えば次の命題を考えてみよう:

関係 $x \top z = y \top z$ が成り立つならば $y = z$ である.

もちろん 3 つの理論それぞれにおいて, 当の理論で特別にあつらえられた論法によって証明することも可能である; しかしながら, すべての場合にあてはまる次のような証明が可能なのである:

*Démonstration*

$x'$ が先ほど考えた性質をもつ要素 ⟦つまり $x$ の逆元⟧ であるとする. 関係 $x \top y = x \top z$ から $x' \top (x \top y) = x' \top (x \top z)$ が成り立つ. 公理 a) ⟦結合性⟧ によって

$$(x' \top x) \top y = (x' \top x) \top z$$

が成り立つ. 公理 c) ⟦逆元の性質⟧ を用いてこれから

$$e \top y = e \top z$$

となり, 最後に公理 b) ⟦単位元の性質⟧ により $y = z$ となる. これが証明すべきことであった. ■

$x, y, z$ などの要素がどのようなものであったか, その**本性** *nature* は, 上の議論においては一切問題ではない. つまりそれらが実数であるか, それとも $p-1$ 以下の正整数であるか, あるいは ⟦空間における⟧ 変換であるか, などには, 我々は一切興味がないのである. この議論で働いていたのは, これ

[4] まず直ちに解るように, 整数 $x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$ を $p$ で割ったときの余りがすべて異なることはない; 次に 2 つの余りが等しいとしてみると, $x$ のあるべき $x^m$ が存在して, $x^n$ を $p$ で割った余りが 1 であることが容易に示される; 今, $x^{m-1}$ を $p$ で割った余りを $x'$ とするならば, $x$ と $x'$ との積が 1 であることが帰結する. ■

らの要素に対する $x\top y$ という演算が性質 a), b), c) をみたす, という仮定だけだったのだ. 仮に煩わしい繰り返しを避けるためだけであったとしても, これら 3 個の性質 a), b), c) **だけから** *seules* 導かれる論理的帰結を, **すべて一挙に** *nme fois pour toutes* 列挙できてしてしまうというのは, 明らかに有意義なことことであろう.

当然のことだが, 言語の節約のために, 共通な用語法を採用しなければならない;

> 3 個の性質 a), b), c) を成り立たせるような演算 $x\top y$ が定義されている集合は**群構造** *une structure de groupes* を与えられている (あるいはより簡潔にその集合は**群** un *groupe* である) と言われる. そして, 性質 a), b), c) こそが群構造の**公理** *axiomes*[5] と呼ばれ, それらから導かれる論理的帰結を導くことが**公理的群論** *théorie axiomatique des groupes* を考察することに他ならない.

今や, 一般的なやり方で, **数学的構造** *structure mathématique* という言葉によって理解されるべきものを示すことができる. この一般的な呼び方によって指示される様々な概念に共通する特質は, まず性質[6] が**一切特定されていない** *n'est pas spécifiée* ような要素からなる集合に, この名があてがわれる, ということである; 構造を定義するためには, 次のような手順が必要となる: まず, その集合の要素の間に成立するいくつかの関係が与えられる[7].

(群の場合には, 任意の 3 個の要素の関係 $z = x\top y$ である); 次にその与えられた 1 つまたはそれ

---

[5] 言うまでもないことだが, 「公理」という語のここでの意味と, 伝統的な「自明な真理」という意味の間には, 何一つ共通なものはない.

[6] ここでは我々は「素朴な」« naïf » な視点に立ち, 半分哲学から, そし半分数学から生じる面倒な問題――数学的「存在」« êtres » あるいは数学的「対象」« objets » の「本性」« nature » によって引き起こされる――については, 立ち入らないことにする. 我々は次のように述べることで満足しよう:

これらの「存在」« êtres » の心的概念に関して, 初期には多元論があった. その存在はまず何より感覚経験からする理論的「抽象化」« abstraction » として想像され, また感覚経験の雑多な異質性をすべて保存しているものであった. しかしながら, 19 世紀から 20 世紀にかけての公理論的研究は, ここでもまた, 徐々にではあるが, すべての数学的概念を, まず最初の段階では整数の概念へと, 次には第 2 段階として**集合** *ensembre* 概念へと, 帰すことにより, 数学的存在を一意的な概念に置き換えてきた.

この後者, つまり集合という概念は, 長くに渡って「原初的」« primitive » でかつ「定義不可能な」« indéfinissable » ものと考えられていて, その度を越した一般的性質と, それが呼び起こす心的概念の非常な曖昧さによって, 果てしのない論争の対象であった.

こうした難点は (またそれと供に数学的「存在」« êtres » に関する形而上学的な疑似問題全体も), 集合という概念そのものがなくならない限り消滅しないことが, 最近の論理形式主義論における研究によって明らかになった. こうした新たな概念 ⟦の枠組み⟧ においては, 本来の言い方をすれば, 数学的構造だけが, 数学の**ただ 1 つの対象** *les seuls « objets »* であることになる.

こうした問題についてのより深化された考察は, 次の論文で見ることができる:

- Dieudonné, J.: *Les méthodes axiomatiques modernes et les fondements des mathématiques*. (*Revue Scientifique*, LXXVII (1939), pp. 224–232). (『現代における公理的方法と数学の基礎』)
- Cartan, H.: *Sur le fondement logique des mathématiques*. (*Revue Scientifique*, LXXXI (1943), pp. 3–11). (『数学の論理的基礎について』)

[7] 実際には数学一般のためには, ここで与えられる構造の定義は十分な一般性をもっていない. 構造を定義する際には, 考えられている集合の要素間の関係だけではなく, その集合の部分集合どうしの関係や, あるいは更に一般的には, 「タイプの階層」« échelle des types » 理論の用語を用いれば, より高い「階層」« degreé » に属する集合の要素間の関係が成立する場合を考察しなければならない.

より詳しくは, 我々の『数学原論』第 1 巻「集合」, 要約を参照のこと

より多くの関係それぞれが, ある種の条件 (ただし条件の個数は可算個である場合に限る) をみたすことを要請する. この要請こそが, 探求されている構造の**公理** *axiomes* に他ならない[8].

与えられた構造の公理的理論を研究するとは, 考えられている要素に関する**他の一切の仮定を締め出した上で** *en s'interdisant tout autre hypothèse* (特に, それらの特別な**固有性**に関する sur leur « nature » propre どんな仮定であれそれを排除して), その構造の公理から導かれる論理的帰結を探査していく作業に他ならない.

## 4 構造の主なタイプ

Les Grands Types de Structures

構造を定義するにあたって, その冒頭に関係 ⟦という概念⟧ が現われるが, これはその本性からして極めて多様なものである. 群構造で役割を担うその関係は「結合規則」une « loi de composition » と呼ばれる. つまり 3 個の項の間に成り立つものであり, 最初の 2 項の関数値として第 3 項が一意的に定まるような関係である. ある構造を定義している関係が「結合規則」であるとき, その対応する構造は**代数構造** *structure algébrique* と呼ばれる. (例を挙げれば, **体** *corps* の構造は, 適当は公理をみたすような 2 つの結合規則によって定義される. 実数の加法と乗法は, 実数すべてからなる集合上にある体構造を定義する. )

これとは別の重要なタイプとして, **順序**関係によって定義される構造 les structures définies par une relation d'*ordre* がある. この場合には, 2 つの要素 $x$, $y$ の間に成り立つ関係であり, それは普通「$x$ は高々 $y$ に等しい」(« $x$ est au plus égal à $y$ ») と呼ばれるようなものである. この関係一般を表わすために, 記法として $xRy$ を用いることにしよう. この場合には, $x$, $y$ という 2 つの要素の内の一方が, 他方の関数値として一意に定まることを全く仮定していない; この関係がみたすべき公理は次の 3 個である:

(a) 任意の $x$ について $xRx$ が成り立つ ⟦反射律⟧;
(b) 関係 $xRy$, $yRx$ が成り立つならば $x = y$ である ⟦反対称律⟧;
(c) 関係 $xRy$, $yRz$ が成り立つならば $xRy$ が成り立つ ⟦推移律⟧.

整数の集合は (そして実数の集合も), もし記号 $R$ を記号 $\leq$ に書き換えさえすれば, こうした構造を備えた集合の明らかな例である.

ただし, 次のことに注意しなければならない. 通常の『順序』« ordre » という概念からは切り離すことができない性質, つまり

任意に $x$, $y$ が与えられたとき, $xRy$ または $yRx$ のいずれか一方が成り立つ

という命題を, 我々は公理として認めていない, ということである. 別の言い方をすれば, 2 つの要素

[8] 群について, それを完璧に厳密な形で扱かおうとすれば, 公理は a), b), c) の 3 個ではなく, 更に次を明言することが必要である: $x$ と $y$ が与えられたとき, それに応じて 1 つの, かつただ 1 つだけの, $z$ が定まる. しかしながら, この一意性という性質は, $z = x\top y$ が関係として明言されたときには, 暗黙の内に了解されているのが普通である.

が**比較不可能である** *incomparables* という可能性を我々は排除していないのである.

これは一見したところ奇妙に思えるかも知れないが, こうしたこと ⟦つまり 2 つの要素が比較不可能であること⟧ が起こる重要な順序関係の例を挙げるのは難しいことではない. 例を挙げてみよう:

*1) $X, Y$ が与えられた集合の部分集合であり, 関係 $XRY$ が「$X$ が $Y$ に含まれる」« $X$ est contenu dans $Y$ » を表わしているとき;
*2) $x, y$ が正整数であり, $xRy$ が「$x$ は $y$ を割り切る」« $x$ divise $y$ » を表わすとき;
*3) 最後に, $f(x)$, $g(x)$ が区間 $a \leq x \leq b$ 上で定義された実数値関数であり, $f(x)\,Rg(x)$ が「任意の $x$ について $f(x) \leq g(x)$」« quel que soit $x$, $f(x) \leq g(x)$ » を表わすとき.

これらの例は, 順序構造をもつ領域が多種多様であり, 同時にそれらの研究が興味深いものであることを, 我々に予見させるものでもある.

次に, 主要な構造の 3 番目のタイプ, つまり**位相構造** *syructures topologiques* ——あるいは単に**位相** *topologies* とも呼ばれる—— について, 手短に触れておこう: この構造は, 我々のもつ空間という概念に分かち難く結びついている直感的な考え, つまり**近傍** *voisinage*, **極限** *limite*, **連続性** *continuité* などを数学的に抽象して得られる形式化である.

この構造の公理を詳しく述べるためには, これまで挙げた 2 つの例に比べてはるかに高度な抽象化の努力を払わねばならず, より一層詳しい内容を学びたい読者には, この分野の専門書に当ってみることを勧めるに留めておく[9].

## 5　数学的な道具箱の標準化

La Standardisation de l'Outillage Mathématique.

以上公理的方法というものについて十分論じたので, ここまで読み進んでくれた読者はそれに関するかなり正確なアイデアをもつことができたと思う. これまで述べられてきたことから納得できるであろうが, 公理的方法の最も顕著な特徴は, それがかなりの**思考の節約** *économie de pensée* を我々にもたらしてくれる, ということである.『構造』« structures » は数学者たちの**道具箱** *outils* である; ある数学者が, 既に知られたタイプの構造の公理をみたすような関係が, 自分の研究している要素の間に成り立つことを見つけた途端, 彼には当のタイプの構造に関連する一般的な定理が収納されている貯蔵庫全体が手に入り, それを自由に使えることになる. これに気がつく以前にあっては, 彼は一人きりで苦労しつつ問題を攻撃する装置を作ろうと工夫していたはずである. しかしながらその装置開発は, 彼という数学者の力量に依存するものであり, また研究されている問題の特殊性に由来するような, 必要以上に制限された仮定によって妨げられることがよくある.

こうして, 次のように言えることになる: 公理的方法とは数学の『テーラーシステム』« systéme Taylor » ——つまり科学的経営術——以外の何ものでもない.

[9] 例えば我々の『数学原論』第 3 巻「位相」(*Élements*, livre III. Topologie) (*Actual. Scient. et Industr.*, n° 858) の序章と第 1 章を見られたい.

ただし, この比較は十分に的を射たものであるとは言えない. 数学者は流れ作業の生産ラインに立つ作業員のようにして, 機械的に仕事をするわけではない; 数学者の研究において, 特別な**直観** une *intuition* particulière[10] が軽んじられてはならない. これは普通の意味での直観とは多少異なる. むしろ, (すべての ⟦理性的⟧ 思惟に先立つ) 当然の成り行きについての直覚的な予知 ⟦見通し⟧ である. こうした予知は, 彼との長きに渡るつき合いによって, 現実世界のものと同様に身近なものとなった数学的存在が与えてくれるものなのだ.

さて, それぞれの構造はそれ固有の言語で記述されている. その言語は, 特有な直観的な響きを伴なっており, それは, 先述したような公理的解析を行なったその当の理論に起因するものである. だから, 自分が研究している ⟦数学的な⟧ 現象の内にこの構造を突然見出した研究者にとって, その発見は, 彼の思考の直観的な流れを, 一挙に予期していなかった方向へと急激に向きを変えてしまうような転調であり, 彼が暮らしていた数学的遠近感を, まったく新たな光の下に照らし出す.

やや古典的な例を採り上げよう. 19 世紀初頭に起こった複素数の幾何学的表現によって現実のものとなった進展を考えてみよう; 我々の観点からすれば, 結局のところこれは, 複素数からなる集合がよく知られた位相構造 ——ユークリッド平面のもつ位相—— をもっていることの発見である. そしてこの発見はまた, 偉大な応用の可能性をも孕んでいた. それはガウス, アーベル, コーシー, そしてリーマンの手中に収まることにより, 百年にみたない間に, 解析学を完全に書き換えるに至ったのだ.

こうした例は, 最近の五十年の間に更に増殖する. 次に例を挙げよう:

- ヒルベルト空間, 一般に関数空間, は, 要素が**点** *points* ではなく, **関数** *fonctions* であるような集合に位相を導入した;
- ヘンゼルの $p$ 進数においては, 驚くべきことに, それまでは不連続なものの代表と考えられていた離散的集合 ——整数の集合—— に位相が入り込む.
- ハール測度により, 積分という概念は測り知れない程その適用範囲を拡張され, 連続群の性質をその深奥に達するまで解析することを可能にした.

これらはどれもみな, 数学が前進する決定的な瞬間を体現している: それは, 天才の一瞬のひらめきが理論の新たな方向を決定する, 急激な方向転換点である. そしてそのひらめきこそ, 先験的には役割を演じるようには思われていなかったある構造が, 当の理論の内部に潜んでいることを暴き出すことに他ならないのだ.

従って, 数学が孤立したバラバラの数式に関する純粋に機械的なゲームに還元されるものであるなど, とんでもない話である. むしろ様々な発見が成されるとき, その起源においては, 直観こそがそれを統治しているのだ. しかしその発見が一度成されてしまった後には, 数学は主要なタイプの構造に関する理論によって提供された強力な武器を自由に用いることができるのであり, また, かつては最も不定形な混沌が支配していると思われていた広大な領域が, 公理論によって一つに統合された結果, その領域を一望できるまでになるのである.

[10] 更に言えば, これはすべての直観と同様, しばしば誤っているような直観である.

## 6　数学の全体像

Une Vue d'Ensemble.

さて, 公理論を導きの糸として, 数学的宇宙の全体を表象することを考えよう. 確かなことだが, 今日にあっては, 伝統的なやり方での研究対象の配置を認めるわけにはいかない. それはあたかも, 動物の類種分類を初めて試みたその試みのように, 外見上最もよく似て見える理論を次から次へと並べていっただけのものである. ところが, このような伝統的なやり方に現われるくっきりと区分けされた分割, つまり「代数」,「解析」,「数論」,「幾何学」という部屋割り, とは裏腹に, 例えば素数論が代数的曲線論のすぐ隣りの場所を占めていたり, あるいはユークリッド幾何学が積分方程式論と境を接しているのを, 我々はよく目にするのである. ⟦古典的な分類に対するに⟧ 我々が諸々の理論を再配置する際に依拠する原理は, **構造の階層** *hiérarchie de structures* という概念であり, それは単純なものから複雑なものへ, 一般的なものから特殊なものへ, と向かうものである.

その中心を占めるのは, 我々が先ほど列挙した基本的構造, つまり構造の主要なタイプ ——これらは**母構造** *structures-mème* とも呼ばれる—— である. これらの構造それぞれの内部には, かなりの多様性が存在する. まず, 最も少数の公理で定義されるような, 最大の一般性をもつ構造がある. これについては先述の通りである. こうしたタイプの構造に付加的な公理を加えて得られる構造は, もとの母構造とは区別されねばならない. それぞれの新たな公理からは, 新たな帰結が収穫物として得られるからである.

例えば群論をとり挙げてみよう. 既に列挙された公理 a), b), c) にのみ依存し, すべての群について妥当であるような一般的言明 ⟦からなる一般群論⟧ 以外に, それとは異なる理論として**有限群論** une théorie particulière des groupes *finis* (これは群論の公理 a), b), c) 以外に, 群の要素の個数が有限である, という公理を加えて得られる) や, やはり一個の理論として**アーベル群論** une théorie particulière des groupes *abéliens* (これは任意の $x$, $y$ について $x\top y = y\top x$ が成り立つことが公理として加えられた理論である), そして更に**有限アーベル群論** (une théorie des groupes *abéliens finis*) がある. これは両方の公理 ⟦有限個の要素からなり, かつ可換性をもつ⟧ が同時に成り立つような群についての理論である.

同様にして, **順序集合** les ensembles *ordonnés* の中からは, (整数もしくは実数がもつ順序のように) 任意の 2 つの要素が比較可能であるような集合を選び出すことができる. これらは**全順序集合** *les totalement ordonées* と呼ばれる. そしてこの全順序集合の内には, 更に特殊なものとして, **整列集合** (les ensembles *bien ordonées*) があり, これも活発な研究の対象となっている (これは, 正整数がその例であるように, その任意の部分集合が『最小元』« plus petit élément » をもつような ⟦順序⟧ 集合である.)

もちろん位相構造においても, これと類比的な漸次的段階性が存在する.

そしてこれらを第一の核として, その外側には**複合構造** structures *multiples* とでも呼ぶべき構造が現われる. これらにおいては, 2 つまたはそれより多くの大きな母構造が, 単に並置されるのではなく (そうだとしたら何一つ新しいものを生じさせることはない), 同時に役割を演じることにな

る. 複数個の構造が, それらを関係づけるいくつかの公理によって**有機的に結合される** *combinées organiquement* のである.

例えば**位相代数** l'*algèbre topologique* という分野では, いくつかの結合法則と位相とが作る構造が研究の対象であり, そこでは代数的演算はそれが適用される要素の (仮定されている位相における) **連続関数** *fonctions continues* でなければならないという条件で関係づけられている.

**代数的位相幾何** *topologie algébrique* と呼ばれる分野もこれに劣らず重要である. この分野では, ある位相的性質 (例えば単調性や周期性など) によって定義された空間の点集合が, それ自体ある結合法則が作用する要素と見做される.

順序構造と代数構造の結合もまた, 様々な結果を算出す肥沃な土壌である. 一方では整除論やイデアル論を生み出し, また他方では積分論及び演算子の『スペクトル理論』« théorie spectrale » へと連なっており, ここでは位相 ⟦構造⟧ もまた重要な役割を演じている.

⟦特殊化への⟧ 歩みを更に進めれば, とうとう最初の, 厳密な言い方をすれば固有な理論とでも言うべき理論に達することになる. そこでは, これまでは一般的な構造において完全に不特定のままにされていた考察中の集合の要素が, より限定された性質をもつ一つ一つの個体として把握し直されることになる. ここにおいてこそ, 我々は古典的数学の諸々の理論を一つの統合された理論と見做すことができる. つまり実または複素変数関数の解析学, 微分幾何, 代数幾何, そして数論である. ただしもはやこれら諸理論は, かつて有していたような自律性をはぎとられており, これら一つ一つは, 数多くのより一般的な数学的構造をもつ理論が, 出会いそして相互に作用を及ぼし合うような交差点になっているのだ.

ここで, 我々の観点の正当性を保つために, ただちに言い添えなければならないことがある: それは, これまで我々が駆け足で描いてきたスケッチは, 今日実際に行なわれている数学の状況を, 非常にラフに近似したものでしかない, ということである. この意味は, 上記のスケッチが**図式化された** *schématique* ものであり, **理想化された** *idéalisée* ものであり, そして**固定化された** *figée* ものである, ということである.

- 図式化されていること: 実際に数学を行っていく場合, 我々がここで示しているように見える程単調に, あるいは規則的に, ことが進むわけではない. とりわけ何にもまして, 上下の予期せぬドンデン返しが起こる. これについては, 実数論の完成される過程がちょうどよい例である. 完全に特殊化された ⟦つまり実在として完全に個体化された対象を扱かう⟧ 理論 ⟦としての実数論⟧ が, 実際には位相や積分などのような一般的理論の構成を不可欠なものとして要請したのだ;
- 理想化されていること: 数学のすべての分野・領域において, 主要な構造それぞれが果たすことになる役割を, 我々が完璧に認識してるとはとても言えないのが実情である. 今日に到るまで, ある理論 (例えば整数論) には, 既知の構造の下に, 満足のいくような仕方で分類したり, あるいは構造と関係付けたりすることがまったくできないような, 孤立したバラバラの結果が数多くある;
- 固定化されていること: 科学を固定的なものと見做す考え方ほど, 公理的方法と縁遠いもの

はない. 読者には, 我々の主張が, 科学に対する最終的な説明を与えているものであるとは考えて欲しくない. 構造は, その個数についてもまたその本性についても, 不変なものではない. 数学がより先に進んだとき, 新たな公理, または公理の新たな組み合わせの実り豊かさが明らかになることにより, 基本的構造の個数が増えるというのは, 大いにありそうなことである. 既に知られている構造がもたらしてくれた進展から判断して十分期待できることであるが, 新たな構造の発見によってこそ, 決定的な進展がもたらされるのだ. もちろんその新たな構造もまた, 完成された構築物ではない. こうした原理を育む養分が, その原理が発見された途端に枯渇してしまう, と考えるのはとんでもない誤りである.

さて, 以上の不可欠な但し書きをつけた上でならば, 数学の内的な生命力というものを, 読者は皆理解できるであろう. それは数学に対して, 統一性と分散性を同時に与えるものである; これは大都市の姿に似ている. 周辺部分はつねに外側に向かって, ある種混沌とした姿で拡がっていくのを止めることはない. しかしながらその中心部分は定期的に再構築される. その度毎に, より明確な計画とより思慮深い指図に従って, 郊外につながるまっすぐでより広く, より便利な大通りを新たに建設するために, 迷路のように入り組んだ小路にあふれている古い区画を解体する作業が行なわれているのだ.

## 7　ここまでの反省と展望

Retour sur la Passe et Conclusion.

我々が以上で光を当てようと試みてきた概念は, 一朝一夕にでき上がったものではないし, また半世紀以上に渡って続いている ⟦数学の⟧ 発展の差し当っての結末でしかない. この概念は, 哲学者からは言うに及ばず, 数学者自身からの由々しき批判に晒されたこともある.

かなりの長期に渡って, 数学者の多くは, 公理論を内容の希薄な, 論理学者の虚しい論理的なへりくつとしか考えなかった. それはどんな理論をも産出することはできない, と考えられていたのである. おそらくこの批判は, 純粋に歴史的な偶然によって説明される; 歴史的に最初の, そして最大の反響を呼んだ公理的理論 (つまりデデキントとペアノによる算術の公理化, 及びヒルベルトによるユークリッド幾何の公理化) は, いずれも**一価的理論** théories *univalentes* を定義するものである. ここで一価的理論とは, 公理系全体によって一意的に決定されるような理論のことであり, 従ってそれらの公理が引き出された基となる理論以外には, どんな理論に対しても適用することが不可能であるような理論のことである (理論の一価性は, 我々が群論について理解しているものと対照させれば明らかになるであろう).

もしこのことがすべての構造に関して事実であったとすれば, 公理的方法に対して投げかけられた不毛さという非難は, 確かにまったく正当なものであったことだろう[11]. しかしながら, 公理的方

[11] 特に公理論の誕生当時には, 確かに何一つ応用をもたない奇怪な構造が群れをなして出現したことがある. それらの唯一の功績は, ある公理を削除したり, あるいは変形したりしたときに, 何が起こるかを観察することにより, それぞれの公理のもつ正確な射程を評価することであった. ⟦公理化された理論がすべて一価的であるとすれば⟧ 公理的方法に期待できる唯一の報酬はこれだけである, という結論を下したくなるのもうなずけるというものだ.

法はそれが発展していく中で, その真価を十二分に発揮してきた. 確かに今日に至っても, この方法に対する反感が散見されるのは事実である. この理由を説明するものは, 人間精神が当然経験することになるある種の困難さである. それは, 具体的な問題を前にして, そこで与えられたものによって直接的に示唆されるもの以外の直観形式が (また, より高度でしばしばより難しい抽象化を通じてのみ得られるような直観形式が), ⟦直接に見てとれるものと⟧ 同等に肥沃なものであり得ることが ⟦後になって⟧ 判るかもしれない, と認めることの困難さなのだ.

それに対して, 哲学者陣営から出てきた反対意見は, もっぱらある大問題に関わるものであるが, 我々はここで, 十分な準備もなしにその問題に立ち入る積もりはない. その問題とは, 経験的世界と数学的世界はいかに関係しているか? というものである[12].

現代物理学の最近の発見によって, 経験的な現象と数学的な構造との間には緊密な関係が存在することが, とても予期されないようなやり方で, 完全に確認されたように思われる. しかしながら, 我々はこうした関係の存在に関して (この言い方が何らか意味をもつ限りで), 何故そうなっているのか? という理由を何一つ知らないし, またいつになっても決して知ることはないであろう. いずれにせよ, こうした観察がなされたことにより, 将来哲学者がより注意深い考察に駆り立てられる, という可能性がある.

現代物理学の革命的な進歩以前には, 経験的事実から, それもとりわけ空間に関する直接的な直観から, 数学を是が非でも導き出そうとして, 尋常でない努力が払われた.

しかしながら, まず一方で量子力学が示したのは, 実在世界に関する「巨視的観点からする」« macroscopique » 直観は, それとはまったく異なる本性をもつ「微視的観点における」« microscopique » 現象を覆い隠している, ということであり, これが示されたのは, 経験的科学に応用されることがあるとは想像もされなかった数学のある分野のおかげであった.

他方においては, 我々が数学の要たることを望んでいた『真理』« les vérités » というものが, あるより大きな一般性をもつ概念の非常に特殊な一側面でしかないことが, やはり公理的方法によって明らかにされた. このより大きな一般性をもつ意味での『真理』概念は, 通常考えられている『真理』に制限されるものでは一切ないのだ.

以上まとめてみれば, 我々がその調和のとれた必然性に目を見張る ⟦2 つの世界の⟧ 内的なからみ合いというものは, 2 つの学問領域の偶発的な接触でしかないかも知れぬ, とも言えるのではないか. その 2 つの領域を結び付ける関係は, **先験的** *a priori* に存在を仮定することはできないような, 完全に隠されたものなのかも知れないのだ.

公理的な概念様式に立ってみれば, 全体として数学というものは**抽象的な形式の貯蔵庫** une réservoir de *formes* abstraites, つまり数学的構造が蓄えられていく場所であるように見える. そして確かに ——理由は誰にも解らないが—— 経験的実在のある側面が, この形式を手本として作られて

[12] ⟦哲学者が出した反対意見として, もう一つ⟧ 形式論理の推論規則を公理的理論における演繹に応用することの是非に関するものがある. しかしながら, この問題についても, 我々はここで詳論する積もりはない. この問題が関わっているのは, 集合論において遭遇する論理的な困難である. ここでは次を指摘するだけで満足することにする: これらの困難は, 何一つ欠点をもつことなく, かつそこで行なわれる推論についても一切疑義をはさむ余地のない論法によって克服することができる. この問題については, 読者は H. カルタンと J. ディュドネによる先ほど引用された論文を是非とも読まれたい.

いることが判明することがある. それはちょうど, 生物学で言う前適応のようである. 当然のことだが, こうした形式の大部分は元々十分に規定された直観的内容を有するものであった. しかしながら, その内容を意図的に抜き去ることによってこそ, 我々はそうした ⟦構造としての⟧ 形式が潜在的可能性としてもっていた有効性を, 現実のものとして ⟦その形式に⟧ 与えることができたのであり, またそれによってこそ, その形式が新たな解釈を受容し, その重要な役割を完全な仕方で果すことを可能にさせたのである.

公理的方法が「形式主義」« formalisme » であると言われてよいのは, 「形式」« forme » という語のこの意味を置いて他にはあり得ない. この意味での形式が数学に与える統一性は, 形式論理学のよろいではない. もしそうならば, その統一性は命をもたない骨格のみからなる人体模型のもつ統一性でしかない. 本来の意味での形式は, 最高度に成熟を遂げた有機体の栄養分であり, ガウス以降の数学に関わる偉大な思索者すべてによって意識的にもたらされてきた, しなやかで実り多き探求の道具立てである. 彼らは皆, レジューヌ・ディリクレの言い方に従えば, 常に**計算に理念を代入する** *substituer les idées au calcul* ことを試みていたのだ.

ニコラ・ブルバキ