多様体のトポロジー

杉ノ内 萌

早稲田大学基幹理工学部数学科 2 年
coo.chan@fuji.waseda.jp (email)

January 18, 2015

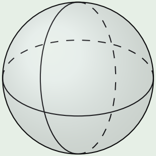
発表の流れ

1. Introduction
   - なめらかな多様体
   - 同相の考え方
2. ホモロジー群
   - 不変量を見つけよう!
   - 不変量その 1: Euler 数
   - 不変量その 2: ホモロジー群
3. Morse 理論
   - アイディア
   - 基本定理
4. 参考文献

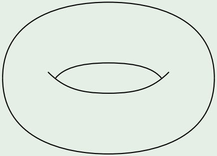
なめらかな多様体

幾何学は図形や空間を分類する.
今日扱うものはなめらかな多様体 (smooth manifold) **と呼ばれる**, **曲面のようなもの**.

多様体の例



sphere,



torus,

Euclidean Space, Riemannian Manifold, Complex Manifold, Symplectic Manifold, Minkowski Space, Calabi-Yau Manifold, . . .

やわらかい幾何学?

分類と言っても色々なレベルで分類できる.
ex) 三角形の合同, 相似, ...

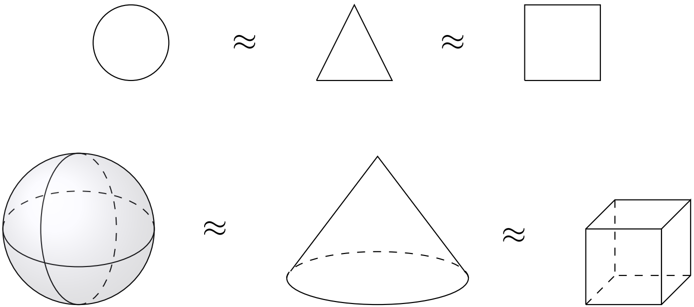
今日の目標=多様体を連続具合で分類する.

ルール

1. 図形をゴム膜だと思う.
2. 膨らませたりしぼませたりして良い.
3. ハサミとノリはダメ.
4. 潰すのも NG. 元に戻せるようにする.

この考え方のもとに同じ図形を同相であるという.

同相な図形の例

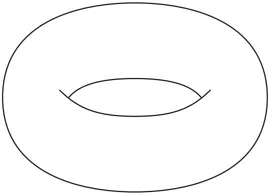


これらはいずれも，一点と同相ではない．

同相な図形の例 その 2

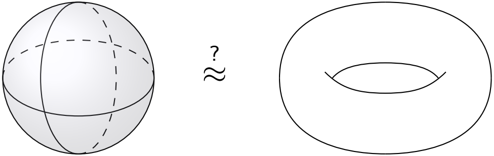
コーヒーカップとドーナッツ?

$\approx$



同相な図形

では，これらはどうだろうか．



直感的に，浮き輪をどんなに膨らませてもボールにはならないからこれらは同相でないと考えられる．
しかし，“同相でない” ということを説明することは難しそう．
$\rightsquigarrow$ 数学的に考えてみる．

多様体の分類

多様体を同相 (連続具合) や微分同相 (微分構造) で分類したい!
$\rightarrow$ これは定義からは難しい

多様体 X と Y が同相

$\Leftrightarrow \exists f : X \rightarrow Y$(全単射連続で逆も連続)

多様体 X と Y が同相でない

$\Leftrightarrow$ どんな写像 $f : X \rightarrow Y$ も全単射連続で逆も連続とならない

$\cdots$ 否定的な命題を直接証明することは難しい

strategy: 不変量を探す

いま, 多様体 X に対してある量 $S(X)$ が定まったとする.
ex) 体積, 表面積, 曲率, 穴の数...

Definition

多様体 X と Y について,

$$X \text{ と } Y \text{ が同相ならば}, \ S(X) = S(Y)$$

が成り立つとき, S を位相不変量という.

位相不変量が計算できれば, 同相かどうか判断できる.

例: Euler 数

次の定理はトポロジーの始まりとして有名である．これは正多面体の分類を与えるなどの応用がある．

Theorem (Euler の多面体公式)

任意の穴のない多面体について次が成り立つ．

$$\textit{Euler}\ \text{数} := (\text{頂点の数}) - (\text{辺の数}) + (\text{面の数}) = 2.$$

$\rightsquigarrow$ Euler 数は位相不変量?

Theorem (閉曲面の分類定理)

向き付可能な閉曲面は g 人乗りの浮袋 Σ_g と同相．一般の閉曲面に対しても分類は完了している．

$\rightsquigarrow$ Euler 数が分類を与える．ex) $\chi(\Sigma_g) = 2 - 2g$.

例: ホモロジー群

多様体 X に対して, k 次ホモロジー群と呼ばれる可換な群 $H_k(X)$ を対応させる位相不変量がある $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.
k 次元的な穴がどれだけあるかを群のデータで表す.

i.e. X と Y が同相ならば, $H_k(X)$ と $H_k(Y)$ は同型.

例: ホモロジー群

球面のホモロジー

n **次元球面** $S^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1\}$ **のホモロジー群**:

$$H_k(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{if } k = 0, n \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

g 人乗りの浮き輪のホモロジー

g **人乗りの浮き輪のホモロジー群**:

$$H_k(\Sigma_g) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{if } k = 0, 2 \\ \mathbb{Z}^{2g} & \text{if } k = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

ホモトピー不変性

Remark

ホモロジー群の重要な性質としてホモトピー不変性というものがある.
連続的に動かしていけるものについては, ホモロジーは変わらないという性質である.
$\rightsquigarrow$ ホモロジーは図形の骨格のようなものを検出している.

ex) 平面 $\simeq$ 円板 $\simeq 1$ 点, (平面 $-$ 原点) $\simeq$ 円

色々なホモロジー

- **単体複体のホモロジー群**:
  多様体を単体分割して, 組み合わせ的に計算する.
  $\rightsquigarrow$ **計算が膨大**

色々なホモロジー

- 単体複体のホモロジー群:
  多様体を単体分割して, 組み合わせ的に計算する.
  $\rightsquigarrow$ 計算が膨大
- 特異ホモロジー群:
  関手性を持ったホモロジー群 (理論的に扱いやすい)
  $\rightsquigarrow$ まず計算できない

色々なホモロジー

- **単体複体のホモロジー群**:
  多様体を単体分割して, 組み合わせ的に計算する.
  $\rightsquigarrow$ **計算が膨大**
- **特異ホモロジー群**:
  関手性を持ったホモロジー群 (理論的に扱いやすい)
  $\rightsquigarrow$ **まず計算できない**
- CW **複体のホモロジー群**:
  多様体をセル分割して計算する.
  $\rightsquigarrow$ **今日はこれについて少し考えてみる.**

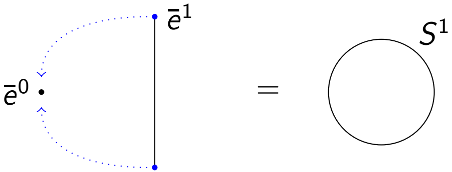
CW 複体のつくりかた

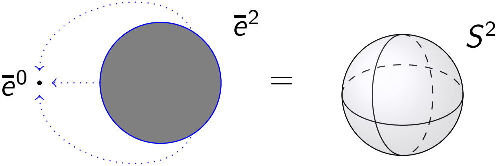
Hausdorff 空間 X の部分空間 e が k 次元円板 D^k の内部と同相であるとき, 同相を与える写像を φ と書いて (e, φ) を k-セルという. k をセルの次元という. k-セルを e^k と書いたりする.
ex) 0 セルは点, 1 セルは曲線, 2 セルは領域みたいなもの.

CW 複体はセルを材料とする.
まず, 0 セルに 1 セルを境界で貼る.
次に, できたものに 2 セルの境界を貼る.
(これを繰り返す)
これでできたものをセル複体という.
セル複体の位相に帰納的な構造を持たせたものが CW 複体である. 今日は有限個のセルの集まりのみを考える.

CW 複体の例 1: 球面

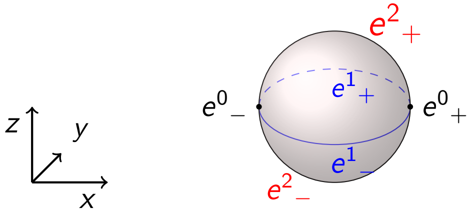
$$S^n = e^0 \cup e^n$$





または...

$$S^n = (e^0{}_+ \cup e^0{}_-) \cup (e^1{}_+ \cup e^1{}_-) \cup \cdots \cup (e^n{}_+ \cup e^n{}_-)$$



CW 複体の例 2: 射影空間

Theorem

実射影空間と複素射影空間は次のようなセル分割を持つ.

1. $\mathbb{R}P^n = e^0 \cup e^1 \cup e^2 \cup \cdots \cup e^n$
2. $\mathbb{C}P^n = e^0 \cup e^2 \cup e^4 \cup \cdots \cup e^{2n}$

これは定義からも導けるが, Morse 理論を使っても求められる.

セル複体のホモロジー

セル複体 X に対し，チェイン複体

$$C_*(X) = (\cdots \to C_{k+1}(X) \to C_k(X) \to C_{k-1}(X) \to \cdots)$$

を次により定める.

- $C_k(X) = \mathbb{Z}^{(k\text{-}\textbf{セルの数})}$
- $\partial_k : C_k(X) \to C_{k-1}(X)$ $\cdots$ むずかしい

この複体からできるホモロジーは特異ホモロジーと同型になることが知られている.

計算例: 複素射影空間

複素射影空間のセル分割は
$\mathbb{C}P^n = e^0 \cup e^2 \cup e^4 \cup \cdots \cup \cdots \cup e^{2n}$ で与えられるから,

$$C_*(\mathbb{C}P^n) = (\mathbb{Z} \to 0 \to \mathbb{Z} \to 0 \to \cdots \to 0 \to \mathbb{Z})$$

となるので,

$$H_k(\mathbb{C}P^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{if } k \text{ is even and } 0 \leq k \leq 2n \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

を得る. 一般には ∂_k を求めるのが大変であるが, 今回はラッキー (球面や g 人乗りの浮き輪も比較的ラッキー.). しかし, セル分割がわかれば Euler 数は容易に計算できる.

セル分割と Euler 数

セル複体 X **の** Euler **数** $\chi(X) := \sum_k (-1)^k \operatorname{rank} H_k(X)$ **はチェインの定め方より次によって計算できる.**

Theorem

$$\chi(X) = \sum_k (-1)^k (k\text{-セルの数})$$

Reeb の球面定理

多様体上の関数 f が非退化な臨界点を持つとは，臨界点において f の Hesse 行列が正則行列であることを言う．

Theorem (Reeb)

n 次元多様体 X が臨界点を 2 つしか持たず，かつそれらが非退化であるような関数 f を持ったとする．このとき X は n 次元球面 S^n と同相である．

$\rightsquigarrow$ これにより，非退化な臨界点を持つ関数が多様体のトポロジーに影響していると考えられる．

Morse 理論のアイディア

Morse 理論は多様体のセル分割を与えてくれる.

Morse 理論の基本定理

Lemma (Morse の補題)

多様体 X 上の関数 f が非退化な臨界点 p を持ったとする．このとき，p まわりの座標 $(x^1, \ldots, x^n)$ が存在して

$$f = f(p) - (x^1)^2 - \cdots - (x^\lambda)^2 + (x^{\lambda+1})^2 + \cdots + (x^n)^2$$

が成り立つ．このとき λ を f の p における指数という．

式の形から，非退化な臨界点は孤立することが分かる．

このとき, f **の** Hesse **行列は**

$$H_f(p) = \begin{pmatrix} -2 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & -2 & & & \\ & & & 2 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 2 \end{pmatrix}$$

と表される.

多様体 X 上の関数 f を考えるとき, $X^a := f^{-1}(-\infty, a)$ と書くことにする.

Theorem

多様体 X 上の関数 f を考える. $f^{-1}([a, b])$ が臨界点を持たないコンパクト集合であるとき, X^a と X^b は微分同相である.

証明の方針) $grad\ f$ の積分曲線に沿って動かすことにより微分同相を構成する.

Theorem

多様体 X 上の関数 f が非退化な臨界点 p を持ったとする．臨界値を $c = f(p)$ とし，ある小さい $\varepsilon > 0$ について $f^{-1}(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$ には臨界点がなくコンパクトであるとする．このとき，p における指数を λ とすれば，$X^{c+\varepsilon}$ は $X^{c-\varepsilon}$ に λ-セルをくっつけたものとホモトピー同値である．

Corollary

多様体 X のセル分割が *Morse* 関数 (臨界点が非退化な関数) の指数を調べあげることによって分かる．

[朗報]Morse 関数はあります!

参考文献

1. Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2001.
2. J.W.Milnor. *Morse Theory*. Annals of Mathematical Studies 51. Princeton University Press, 1963.
3. 川澄響也. 2014 年度冬学期 幾何学 ii, 講義ノート.
4. 枡田幹也. 代数的トポロジー. 講座 数学の考え方 15. 朝倉書店, 2002.
5. 松本幸夫. Morse 理論の基礎. 岩波講座 現代数学の基礎 27. 岩波書店, 1997.

ご清聴ありがとうございました.