代数幾何学－平面曲線の特異点解消について
Algebraic geometry － On resolving singularities of plane curves

早稲田大学基幹理工学部数学科 3 年
久保田 絢子

2014 年 3 月 16 日

1　はじめに

大学で学ぶ数学を大まかに分類すると, 代数学, 幾何学, 解析学, 応用数学の 4 つに分けることができ, 私の専攻している代数学はさらに数論, 代数幾何学, 表現論の 3 つに大別される. 今回の発表では代数幾何学がどのような学問なのか, その雰囲気を伝えたいと思う. 代数幾何学は一言で言えば, 多変数多項式の零点集合で定まる図形 (これを代数多様体という) を研究する学問であり, その大きなテーマとして「特異点理論」がある. 代数多様体が滑らかでないとき, それは「特異点」を持つと言われる. この発表では平面曲線の特異点に焦点をあてようと思う. 廣中平祐は, 標数*[1]0 の体*[2]上の代数多様体の特異点解消に関する論文で 1970 年にフィールズ賞を受賞した. 廣中の論文では, 代数多様体に「ブローアップ」という操作を有限回行うことによって特異点を解消できることが証明されており, 今回は平面曲線のブローアップを具体的に計算することで, 特異点を解消するプロセスをみようと思う.

2　平面曲線の特異点

円や放物線などの平面曲線は, $x^2+y^2-1=0$, $x^2-y=0$, のように, 2 変数多項式の零点集合として定義される. 実数係数の 2 変数多項式は一般に

$$f(x,\,y)=\sum_{\text{有限和}} a_{ij}x^iy^j,\ (a_{ij}\ \in\ \mathbb{R},\ i,\ j\in\mathbb{Z}_{\geq 0})$$

と書くことができ, これの零点集合 $C=\{(a,\,b)\in\mathbb{R}^2:\ f(a,\,b)=0\}$ は $\mathbb{R}^2$ 上の曲線を定める. 以下これを $C:\ f(x,\,y)=0$ のように表す. より一般に, n 変数の r 個の多項式 $f_1(x_1,\,\cdots,\,x_n),\,\cdots,\ f_r(x_1,\,\cdots,\,x_n)$ の共通零点, すなわち $\{(a_1,\,\cdots,\,a_n)\ \in\ \mathbb{R}^n:\ f_1(a_1,\,\cdots,\,a_n)=\cdots=f_r(a_1,\,\cdots,\,a_n)=0\}$ は $\mathbb{R}^n$ の図形を定める. このように多変数多項式で定義された図形が代数幾何学の素材である. 今回は 2 変数の多項式で定義された平面曲線を扱う.

さて, 与えられた曲線を深く理解しようと思った時にグラフを描いてみることは基本的であり, そのために曲線上の各点における接線の様子を調べる, というのはよく行うことである. しかし, 接線は与えられた曲線上の

*[1] 5 付録 を参照せよ.
*[2] 5 付録 を参照せよ.

どの点においても定義されるとは限らず, 今回のテーマである特異点上では接線を定義することができない. 接線が定まればその点の近傍では曲線を直線とみなすことができるが, 特異点ではそのような一次近似ができないのである. したがって特異点は解析が難しい点だといえる. 平面曲線の特異点とは直観的には尖ったり捩れたりしている点であり, この特異点を解消して滑らかな曲線に置き換えようというのがこの発表の目的である.

定義 2.1　$C: \ f(x, y) = 0$ を $\mathbb{R}^2$ 上の曲線とする. このとき $\mathbb{R}^2$ 上の点 $P = (a, b)$ が曲線 C の特異点 (singular point) であるとは,

$$f(a, b) = f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$$

が成り立つことをいう. ここで, $f_x(x, y), \ f_y(x\,y)$ はそれぞれ $f(x, y)$ の x, y に関する偏導関数である.
曲線 C は特異点を持つとき特異 (singular), 持たないとき非特異 (nonsingular) であるという.

いくつか例を見てみよう.

例 2.1　1　$C: \ f(x, y) = x^3 + x^2 - y^2 = 0$ とする. 曲線 C の特異点を求めるためには, 次の連立方程式を解けばよい.

$$\begin{cases} f(x, y) = x^3 + x^2 - y^2 = 0 \\ f_x(x, y) = 3x^2 + 2x = 0 \\ f_y(x, y) = -2y = 0 \end{cases}$$

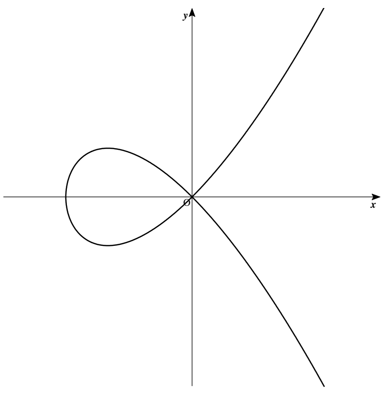
これを解いて $(x, y) = (0, 0)$ を得る. したがって曲線 C の特異点は原点のみである.

2　$C: \ f(x, y) = x^4 + x^2 y - y^3 = 0$ とする. 曲線 C の特異点を求めるためには, 次の連立方程式を解けばよい.

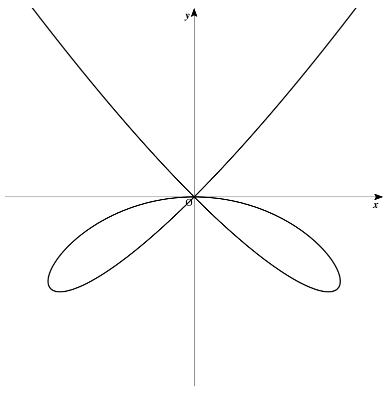
$$\begin{cases} f(x, y) = x^4 + x^2 y - y^3 \\ f_x(x, y) = 4x^3 + 2xy = 0 \\ f_y(x, y) = x^2 - 3y^2 = 0 \end{cases}$$

これを解いて $(x, y) = (0, 0)$ を得る. したがって曲線 C の特異点は原点のみである.

それぞれの場合において, 曲線のグラフは下図のようになる.



$x^3 + x^2 - y^2 = 0$



$x^4 + x^2 y - y^3 = 0$

今回は上の例に挙げた 2 つの曲線の特異点解消をみようと思う. 特異点の解消は正確には以下のように定義される.

定義 2.2　C を平面曲線とする. このとき非特異な平面曲線 C' から C への写像で, 特異点以外の点に関しては全単射となるものを C の特異点解消 (resolution of singularities) という.

3　ブローアップによる特異点解消

この節では曲線の「入れ物」を 2 つ用意する. すなわち, $(t,\ s)$ を座標にもつ $\mathbb{R}^2$ を X, $(x,\ y)$ を座標にもつ $\mathbb{R}^2$ を Y とおいてこれらを区別する. ここで, $X=\mathbb{R}^2$ から $Y=\mathbb{R}^2$ への次のような写像を考える.

$$\begin{aligned}\psi:\ X=\mathbb{R}^2 &\longrightarrow Y=\mathbb{R}^2\\ (t,\ s)&\longmapsto (x,\ y)=(t,\ ts)\end{aligned}$$

この写像 ψ は直線 $E:\ t=0$ を原点 $(0,\ 0)$ へ移し, 残りの部分では全単射を引き起こす. この直線 E を例外曲線 (exceptional curve) という. 例外曲線を除いた部分で全単射になっていることは次のようにして確かめられる. 上で与えた ψ を X から E を除いた部分 $U=X\backslash E$ に制限すると,

$$\psi|_U:\ U=\{(t,\ s)\ \in\ \mathbb{R}^2:\ t\neq 0\}\longrightarrow V=\{(x,\ y)\ \in\ \mathbb{R}^2:\ x\neq 0\}$$

となる. あとはこれに逆写像が存在することをみればよいが, 逆写像は次で与えられる.

$$\begin{aligned}V&\longrightarrow U\\ (x,\ y)&\longmapsto (t,\ s)=(x,\ \frac{y}{x})\end{aligned}$$

定義 3.1　このようにして定義された写像 ψ を $\mathbb{R}^2$ の原点におけるブローアップ (爆発) (blow-up) という.

さて, 原点を通る曲線 $C:\ f(x,\ y)=0\subset Y$ の ψ による逆像 $\psi^{-1}(C)=\{(t,\ s)\in X:\ \psi(t,\ s)\in C\}$ を見てみよう. ψ の定め方から, $\psi^{-1}(C)$ は次で与えられる.

$$\psi^{-1}(C):\ f(t,\ ts)=0$$

曲線 $C:\ f(x,\ y)=0$ は X の原点を通るから, $\psi^{-1}(C)$ は例外曲線 E を含む. このことはつまり, $f(t,\ ts)$ が t の何乗かでくくれることを意味している. すなわち,

$$f(t,\ st)=t^m g(t,\ s),\ \text{かつ}\ t\nmid g(t,\ s)$$

となる自然数 m, および t と s の多項式 $g(t,\ s)$ が存在する.

定義 3.2　この m を, f の原点における重複度 (multiplicity) といい, $ord(f)$ で表す. さらに, $g(t,\ s)=0$ で定義される曲線を $\widetilde{C}$ とかき, C の狭義変換 (strict transform) という.

いくつか例を見てみよう.

例 3.1　　1　曲線 $C:\ f(x,\ y)=x^3+x^2-y^2=0$ のブローアップを計算する.

$$\begin{aligned}f(t,\ ts)&=t^3+t^2-t^2s^2\\ &=t^2(t+1-s^2)\end{aligned}$$

より $ord(f)=2$ であり, C の狭義変換 $\widetilde{C}$ は,

$$\widetilde{C}:\ t+1-s^2=0$$

である. $\widetilde{C}$ は特異点を持たないから, これが C の特異点解消になっている.

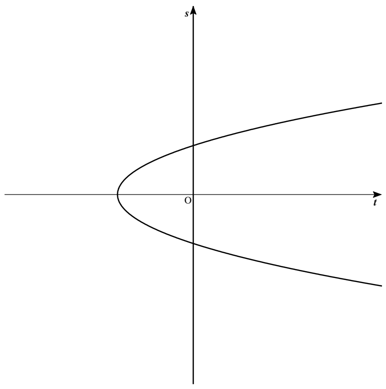
2　$C:\ f(x,y)=x^4+x^2y-y^3=0$ のブローアップを計算する,

$$\begin{aligned} f(t,ts) &= t^4+t^3s-t^3s^3 \\ &= t^3(t+s-s^3) \end{aligned}$$

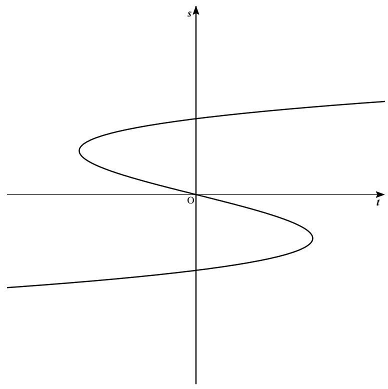
より $ord(f)=3$ であり, C の狭義変換 $\widetilde{C}$ は,

$$\widetilde{C}:\ t+s-s^3=0$$

である. $\widetilde{C}$ は特異点を持たないから, これが C の特異点解消になっている.



$s^2-t-1=0$



$t+s-s^3=0$

上の例ではいずれも $\widetilde{C}$ が特異点を持たない滑らかな曲線になったが, どの場合においても 1 回のブローアップで特異点が解消されるとは限らない. しかし, 平面曲線の特異点は有限回のブローアップで必ず解消され, ブローアップを繰り返し計算する過程で特異点に関する様々な情報も得られるのである. 最後に一つ.

4　問題

曲線 $C:\ x^5-y^2=0$ について以下を示せ.

(1) C は原点にのみ特異点を持つ.

(2) C の特異点はブローアップを 2 回行うことで解消される.

[ヒント： まず C の狭義変換 $\widetilde{C}$ を求め, それが原点にのみ特異点を持つことを示す. 次に, $\widetilde{C}$ の狭義変換 $\widetilde{\widetilde{C}}$ を求め, これが非特異なことを示せばよい.]

5　付録

体およびそれに付随する概念である標数について, ここで補足しておく.

定義 5.1　集合 K が体であるとは, K に加法 $+$ と乗法 $\cdot$ が定義されていて, 次の性質をみたすことである.

1. K の任意の元 $a,\ b,\ c$ に対し, $(a+b)+c=a+(b+c)$ が成り立つ.
2. K の元 0 で, K の任意の元 a に対し, $a+0=0+a=a$ をみたすものが唯一つ存在する.
3. K の任意の元 a に対し, $a+b=b+a=0$ をみたす K の元 b が唯一つ存在する.
4. K の任意の元 $a,\ b$ に対し, $a+b=b+a$ が成り立つ.
5. K の任意の元 $a,\ b,\ c$ に対し, $(ab)c=a(bc)$ が成り立つ.
6. K の 0 でない元 1 で, K の任意の元 a に対し, $a1=1a=a$ をみたすものが唯一つ存在する.
7. K の 0 でない任意の元 a に対し, $ab=ba=1$ をみたす K の元 b が唯一つ存在する.
8. K の任意の元 $a,\ b$ に対し, $ab=ba$ が成り立つ.
9. K の任意の元 $a,\ b,\ c$ に対し, $(a+b)c=ac+bc,\ a(b+c)=ab+ac$ が成り立つ.

(1) を加法に関する結合法則 (associative law) といい, (5) を乗法に関する結合法則という. (4) を加法に関する交換法則 (commutative law), (8) を乗法に関する交換法則という. (9) を分配法則 (distributive law) という. (2) の元 0 を体 K の零元 (zero element) といい, (3) の元 b を $-a$ で表す. また (6) の元 1 を体 K の単位元 (unit element) といい, (7) の元 b を a^{-1} で表して a の逆元 (inverse) という.

例 5.1　有理数の全体 $\mathbb{Q}$, 実数の全体 $\mathbb{R}$, 複素数の全体 $\mathbb{C}$ は体である. p が素数のとき, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}=\{a\ mod\ p:\ a\in\mathbb{Z}\}$ は体である.

例 5.2　自然数の全体 $\mathbb{N}$, 整数の全体 $\mathbb{Z}$ は体ではない.

体に対しては, 標数という概念が定義される[*3].

定義 5.2　K を体とする.

(1)　ある自然数 m が存在して, $m1=\underbrace{1+\cdots+1}_{m\text{ 個}}=0$ をみたすとき, このような m の中で最小のものを K の標数 (characteristic) とよび, $char\ K$ で表す.

(2)　$m1=0$ となる自然数 m が存在しないとき, $char\ K=0$ と定める.

例 5.3　$char\ \mathbb{Q}=char\ \mathbb{R}=char\ \mathbb{C}=0$ である. $char\ \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}=p$ である.

注意 5.1　体の標数は 0 または素数 p である.

最後に参考文献を挙げる.

[*3] 実は, 体より広い概念である環というものに対して標数が定義される.

参考文献

[1] M.Reid, Undergraduate Algebraic Geometry, CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 2001.

[2] 桂利行, 代数幾何入門, 共立出版株式会社, 2009.

[3] 川又雄二郎, 代数多様体論, 共立出版株式会社, 2010.

[4] 斎藤毅, 線形代数の世界 抽象数学の入り口, 東京大学出版会, 2012.