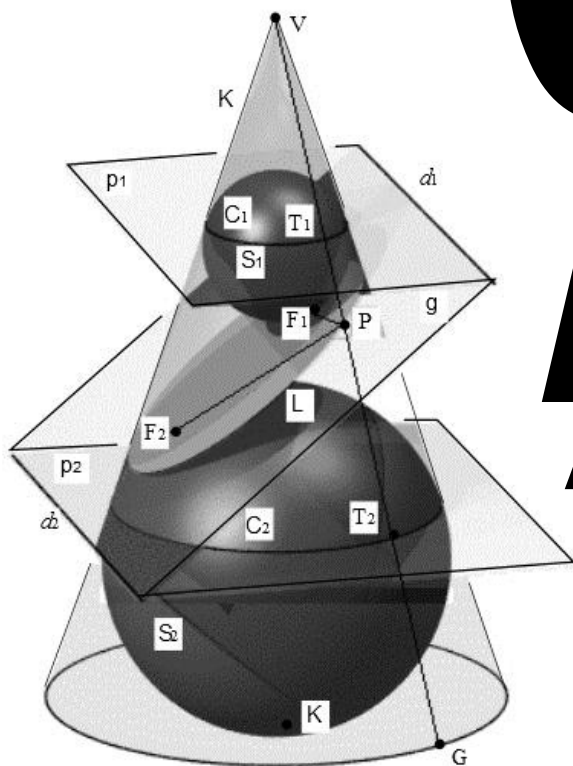


# M3

# $\Psi$

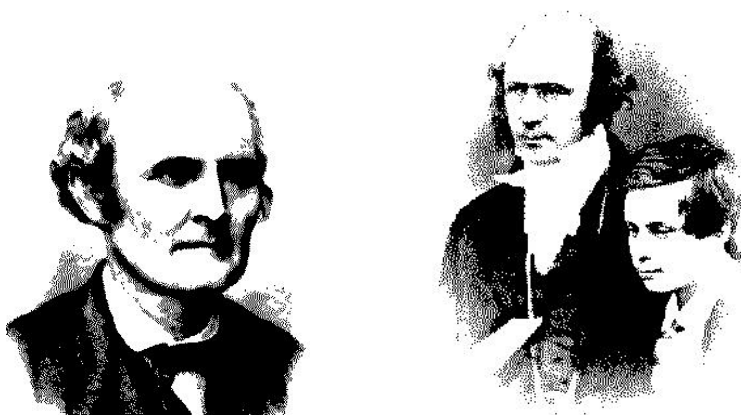


## Algebraic Theory of Curves

*Lecture Part*

Date: 2013/12/08 (Sun)  
Time: 10:00-16:40 (360min)  
Place: Shinjuku  
Lecturere: kymst





左はケイリー (Arthur Cayley, 1821-1895), 右はハミルトンと甥 (Sir William Rowan Hamilton, 1805-1865).

ケイリーはイギリスの数学者, ハミルトンはアイルランドの数学者.

Borwein et al. eds. *Math Resource Interactive Dictionary* より転載.

Thanks to:

- Brannan, D. A., Esplen, M. F. & Gray, J. G. *Geometry*. Cambridge, 1999.
- Hansen, V. L. *Shadows of the Circle*. World Scientific, 1998.
- Gibson, G. G. *Elementary Geometry of Algebraic Curves*. Cambridge, 1998.
- Bix, R., *Conics and Cubics*. Springer, 1998.
- Kline, Morris. *Calculus. An Intuitive and Physical Approach*. Wiley & Sons, Inc. 1967 (1977). Dover reprint, 1998.
- Hairer, E. & Wanner, G. *Analysis by its History*. Springer, 1995.
- Courant, R. & John, F. *Introduction to Calculus and Analysis I, II*. John Wiley and Sons, 1965. reprint Springer, 1989.
- Hilbert, D. & Cohn-Vossen, S. *Anschauliche Geometrie*. Springer, 1932 (1996).
- Brieskorn, E. & Knörrer, H. *Plane Algebraic Curves*. Birkhäuser, 1986.
- Edwards, Harold M. *Linear Algebra*. Birkhaeuser, 1995.
- $\text{\LaTeX}$ ,  $\text{\pLaTeX}$  and  $\mathcal{AMS}$ - $\text{\LaTeX}$ .

(Dpt. of Math. ed., ymst. compiled.)

---

## PREFACE

いよいよ、Greek Letter Series も最終局面に入った。思えば、この Series の初めは、平面 vector の導入であった。その後、vector は 3 次元の空間へと飛翔し、また vector を構成要素とするその統一体としての行列へと発展した。

この数学的な流れは、17 世紀の中葉から 19 世紀初頭の数学への歴史的発展を体現している。諸君は、数学のこの巨大なうねりを、わずか数年のうちに、経験したことになる。

### 巨大なうねり？ 数学のうねり？

その通り、未知なる新たな対象に出会った数学は、その「自らにとって異なるもの」たる世界を、既に自らが制御可能な装置のもとに、己のうちに取り込もうとする。それが成功するとき、数学のテリトリーは拡大し、数学は多様化する。

しかし、己れに対する異者が、「己れのもつ世界観＝数学の既存世界」のうちに、組み込まれるとは限らない。時としてその異者は、我々数学的主体の有り様そのものの変革を促す。その変革の結果、一方で守備範囲の拡大とは裏腹に、かつて獲得されたと信じた一般性が仮初めのものであることが暴かれ、更なる自己止揚が、歴史的必然として準備されるのだ。これを、空間を静的な、固定された点の集合と見る Euclid の慧眼と、あらゆる点がそれ固有の可能的運動を秘めた vector の集合と見る Hamilton の世界観の拮抗になぞらえることに困難はなからう。

諸君が生きてきた数学的世界の認知とは、この歴史の激流を、数学のうねりを、そして他者への優しさを、そのすべてを体現するためのものであったと信じる。従って、それを確認したところで、この Greek Letter Series の責務は完了する。

諸君の今後の課題は明確である。異者たる世界との邂逅を通じて、己の世界を構築 — 再構築すること、これ以外にあり得ぬ。古の哲学者、アリストテレスの言葉<sup>0.1</sup>を、諸君に送ろう：

今日にあっても、また初期の段階にあっても、人間は驚きを通じて、知を愛することを始めた。

διὰ τὸ θαυμάζειν οἱ ἄνθρωποι καὶ νῦν καὶ τὸ πρῶτον ἤρξαντο φιλοσοφεῖν.

すべての愛知が驚きから始まることを身をもって知った諸君なれば、問うべき問は明らかであろう。

**Was kann ich wissen?** 私は何を知りうるか？

**Was soll ich tun?** 私は何をなすべきか？

**Was darf ich hoffen?** 私は何を願いうるか？<sup>0.2</sup>

Thank You, everyone.

Dpt. of Mathematics kymst.

---

<sup>0.1</sup>アリストテレス『形而上学』第 1 巻、第 2 章 982b12-13. Aristotle : *Metaphysica*.

<sup>0.2</sup>Immanuel Kant, *Kritik der reinen Vernunft*. イマヌエル・カント『純粋理性批判』第 1 版 p.804, 第 2 版 p.833.

# Contents

|                  |                      |    |
|------------------|----------------------|----|
| <b>Lecture 1</b> | <b>離心率</b>           | 3  |
| 1.1              | 離心率・焦点・準線            | 4  |
| 1.2              | 放物線 $e = 1$          | 5  |
| 1.3              | 楕円 $0 \leq e < 1$    | 6  |
| 1.4              | 双曲線 $e > 1$          | 6  |
| 1.5              | 円錐曲線と極座標             | 9  |
| <b>Lecture 2</b> | <b>円錐曲線の性質</b>       | 13 |
| 2.1              | 楕円・双曲線の焦点に関する距離      | 13 |
| 2.2              | 円錐曲線と接線・反射           | 14 |
| 2.3              | 共役な弦, 共役な方向          | 16 |
| <b>Lecture 3</b> | <b>円錐切断</b>          | 23 |
| 3.1              | いくつかの定義と初等的概念        | 23 |
| 3.2              | 円錐切断としての2次曲線         | 24 |
| 3.3              | ダンデリンによる証明           | 25 |
| <b>Lecture 4</b> | <b>平面上の変換 — 等長変換</b> | 33 |
| 4.1              | 線形変換                 | 33 |
| 4.2              | 等長変換から……             | 35 |
| 4.3              | ……Euclid 変換へ         | 37 |
| 4.4              | 行列と2次曲線              | 39 |
| 4.5              | 座標系の変換               | 40 |
| 4.6              | 2次曲線の標準化             | 43 |
| <b>Lecture 5</b> | <b>一般2次曲線</b>        | 49 |
| 5.1              | 一般2次曲線               | 49 |
| 5.2              | 2次曲線と座標変換            | 54 |
| 5.3              | 2次曲線の分類              | 58 |



Zathematics

M3Ψ Winter, 2013.

*Lecture* **1**

円錐曲線と離心率



座標平面を創始したデカルト  
René Descartes 1596-1650

Department of Mathematics

---

ある意味で、幾何学的真理は物理学的な真理にとって漸近線のようなものだ。  
というも、後者は前者に限りなく近づくが、完全に合致することはないのだから。  
ダランベール D'ALEMBERT, JEAN LE ROND (1717-83)  
フランスの数学者・物理学者・哲学者。  
Jean Le Rond 教会に捨てられていたのを拾われて、  
この名がつけられたという。

---

# Lecture 1

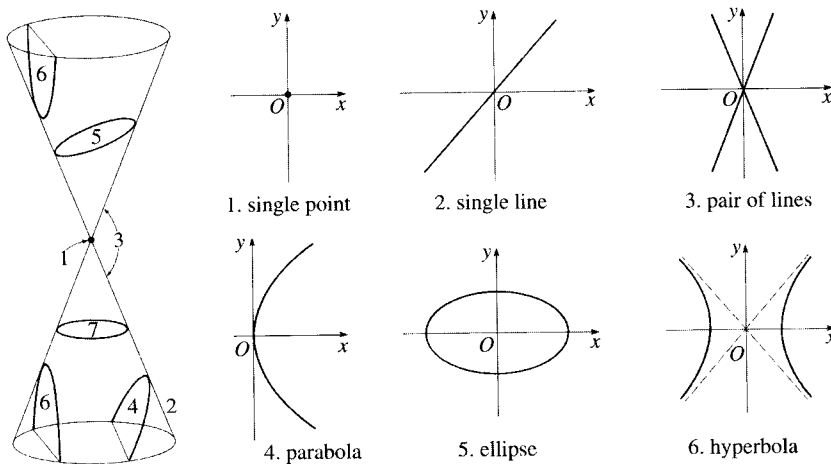
## 離心率

### Theme

|                       |   |
|-----------------------|---|
| 1.1 離心率・焦点・準線         | 4 |
| 1.2 放物線 $e = 1$       | 5 |
| 1.3 楕円 $0 \leq e < 1$ | 6 |
| 1.4 双曲線 $e > 1$       | 6 |
| 1.5 円錐曲線と極座標          | 9 |

『円錐切断 *conic section*』とは、その名の通り円錐面 — *conic surface*. ただし上下に無限に延びているものとする. — をある平面で切断したときに、その交線として得られる曲線である. それらは、下の Figure 1.1 のようになる<sup>1.1</sup>.

Figure 1.1: 円錐切断



これらを総称して『円錐曲線 *conic curve*』と言う. Figure 1 (p. 3) の 7. での交線は、5. の特別な場合としての円になる. 4. を『放物線 *parabola*』, 5. を『楕円 *ellipse*』, 6. を『双曲線

<sup>1.1</sup>Brannan, D. A., Esplen, M. F. & Gray, J. G. *Geometry*(Cambridge, 1999) より転載.

hyperbola』と呼ぶ。楕円，双曲線には中心がある，つまり点対称性 ( $\pi$  回転による不変性) をもつが，放物線にはないことに注意して欲しい。

Figure 1 (p. 3) で 1., 2., 3. のような場合は『退化した *degenerate*』円錐曲線と言われる。それに対して，「本当の」円錐曲線—放物線，楕円，双曲線—を『非退化円錐切断 *non-degenerate conic sections*』と言う。今後，この非退化円錐切断を，『円錐曲線 **conic curves, conic sections**』と呼ぶことにしよう。

## § 1-1.

## 離心率・焦点・準線

非退化円錐曲線を，1 つの観点から見直し，整理してみよう。楕円の特別な場合としての円は，『平面上の 1 点からの距離が一定な，その平面に含まれる点の集合』と定義された。これと類比的な，むしろ，この定義を特殊 case として含むような，3 種類の円錐曲線を統一的に扱うための性質を見出そう。

結論を先取りする。以下，誤解の恐れがない場合には，平面上の点の集合であることは，いちいち断らない。

### Definition 1.1 (円錐曲線の定義)

円錐曲線とは，次の条件をみたす点  $P$  の軌跡である：

ある定点から点  $P$  までの距離と，ある定直線から点  $P$  までの距離の比が一定である。

ここで，ある定点は『焦点 *focus*, pl. *foci*』，ある定直線は『準線 *directrix*, pl. *directrices*』，また一定比は『離心率 *eccentricity*』と呼ばれる。

以下では， $\text{dist}(P, \ell)$  で点  $P$  と直線  $\ell$  の距離を表そう。今， $F$  を焦点， $d$  を準線，また  $e \in \mathbb{R}$  とするとき，

$$PF = e \cdot \text{dist}(P, d)$$

をみたす点  $P$  の軌跡を，(非退化の) 円錐曲線と呼ぼう，というワケである。

次が成り立つ：

### THEOREM 1.2 (離心率)

円錐曲線  $\mathcal{C}$  について，

$$\begin{cases} 0 \leq e < 1 & \iff \mathcal{C} \text{ は楕円,} \\ e = 1 & \iff \mathcal{C} \text{ は放物線,} \\ 1 < e & \iff \mathcal{C} \text{ は双曲線.} \end{cases} \quad (1.1)$$

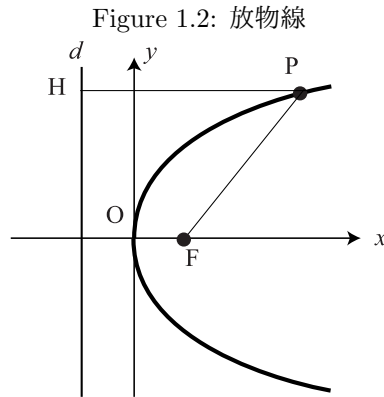
これが成り立つことを，放物線から始めて，楕円，双曲線の順に見ていこう。それによって，それぞれの曲線がもつ，方程式の標準形と parameter 表示が得られる。

## § 1-2.

放物線  $e = 1$ 

離心率  $e = 1$  のとき,  $PF = e \cdot PH = PH$  となる.  $xy$ -平面上で  $F(a, 0)$ ,  $d: x = -a$  とする.  $PF = PH$  となる点  $P(X, Y)$  について, この条件をみたす  $P$  の軌跡  $\mathcal{P}$  を『放物線』と呼ぶ.

$$PF^2 = PH^2 \iff (X - a)^2 + Y^2 = (X + a)^2 \iff Y^2 = 4aX.$$



つまり, 放物線  $\mathcal{P}$  の方程式は

$$y^2 = 4ax \quad (1.2)$$

である.  $t \in \mathbb{R}$  について点  $(at^2, 2at)$  を考えれば, この点は任意の  $t$  の値について  $\mathcal{P}$  上にあるから, 放物線  $\mathcal{P}$  は, パラメータ表示として

$$\begin{cases} x = at^2 \\ y = 2at \end{cases} \quad (1.3)$$

をもつ.

まとめておこう.

**THEOREM 1.3 (放物線の標準形)**

点  $(a, 0)$  を焦点とし,  $d: x = -a$  を準線とする放物線  $\mathcal{P}$  の方程式は

$$y^2 = 4ax$$

である.  $a > 0$  のとき, これを放物線の標準形 (*parabola in standard form*) と言う.

放物線  $\mathcal{P}$  のパラメータ表示は  $\begin{cases} x = at^2, \\ y = 2at \end{cases}$  (ただし  $t \in \mathbb{R}$ ) で与えられる.

標準形で表される放物線  $\mathcal{P}$  において,  $x$  軸を  $\mathcal{P}$  の『軸 *axis*』<sup>1.2</sup>, 原点を  $\mathcal{P}$  の『頂点 *vertex*』<sup>1.3</sup> と言う.

### § 1-3.

### 楕円 $0 \leq e < 1$

#### THEOREM 1.4 (楕円の標準形)

楕円  $\mathcal{E}$  の標準形は

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (\text{ただし } a \geq b > 0, \quad b^2 = a^2(1 - e^2), \quad 0 \leq e < 1) \quad (1.4)$$

である.  $\mathcal{E}$  はパラメータ表示として

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t \end{cases} \quad (\text{ここで } -\pi < t \leq \pi) \quad (1.5)$$

をもつ.  $a > 0$  のとき,  $\mathcal{E}$  は  $(\pm ae, 0)$  を焦点とし,  $x = \pm \frac{a}{e}$  を準線とする.

Figure 1.3: 楕円

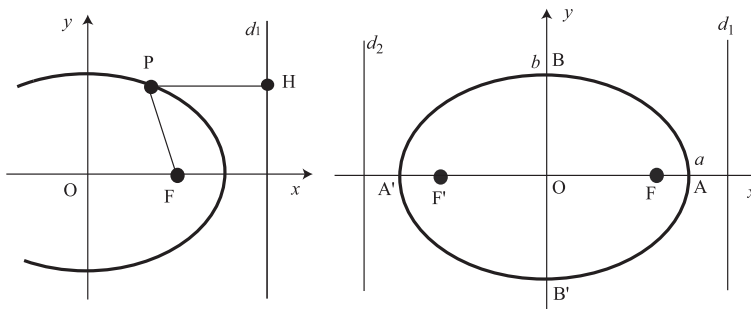


Figure 1.3 (p. 6) の楕円  $\mathcal{E}$  において, 線分  $AA'$  を主軸 *major axis*, 線分  $BB'$  を副軸 *minor axis*, また原点  $O$  を中心 *center* と言う.

### § 1-4.

### 双曲線 $e > 1$

ここで, 円関数の種類を増やしておこう. 双曲線について parameter 表示を行うためには, 次の  $\sec$  という概念があったほうが都合がいい.

$\theta \in \mathbb{R}$  について,  $\cos \theta$  の逆数を  $\sec \theta$  で表す:

$$\sec \theta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\cos \theta}.$$

<sup>1.2</sup>axis は単数形であり, 複数形は axes である. 注意せよ.

<sup>1.3</sup>これも単数形が vertex, 複数形は vertices である. ただし, 最近では “vertexes” という形も目にする用になった.

もちろん,  $\cos \theta = 0$  であるところでは,  $\sec \theta$  は定義されない. したがって, 関数  $f(x) = \sec x$  の定義域  $D_f$ , 値域  $R_f$  は

$$D_f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{(2k-1)\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}, \quad R_f = \mathbb{R} - ]-1, 1[$$

である.

**THEOREM 1.5 (双曲線の標準形)**

双曲線  $\mathcal{H}$  の標準形は

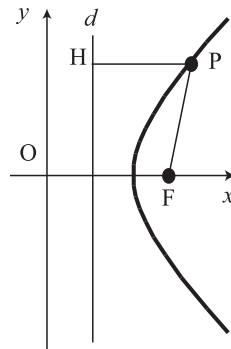
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (\text{ただし } b^2 = a^2(e^2 - 1), \quad e > 1) \quad (1.6)$$

である.  $\mathcal{H}$  は焦点  $(\pm ae, 0)$ , 準線  $d: x = \pm \frac{a}{e}$  をもつ. また, パラメータ表示として,

$$\begin{cases} x = a \sec t, \\ y = b \tan t \end{cases} \quad \text{ここで } -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} < t < \frac{3\pi}{2} \quad (1.7)$$

をもつ.

Figure 1.4: 双曲線の定義



この定理の意味を考え, 導いてみよう.

*Proof.*

いま  $a > 0$  として  $F(ae, 0)$ ,  $d: x = \frac{a}{e}$  と定める.

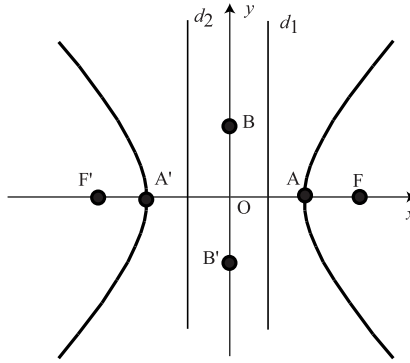
Figure 1.4 (p. 7) で  $PF = e \cdot PH$  とすれば,  $PF^2 = e^2 \cdot PH^2$ . よって  $P(X, Y)$  について

$$(X - ae)^2 + Y^2 = e^2 \left( X - \frac{a}{e} \right)^2 = (eX - a)^2.$$

従って

$$a^2(e^2 - 1) = X^2(e^2 - 1) - Y^2$$

Figure 1.5: 双曲線



が成り立つから,

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{a^2(e^2 - 1)} = 1$$

となる. ここで  $b = a\sqrt{e^2 - 1}$  とすれば,  $b^2 = a^2(e^2 - 1)$  であるから, この式は  $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$  と変形される.

従って, 双曲線  $\mathcal{H}$  の方程式は, 確かに

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

これが,  $\mathcal{H}$  の標準形 (1.6) である.

以上より, 焦点  $F(ae, 0)$ , 準線  $d: x = \frac{a}{e}$  からの距離の比が

$$PF : PH = e : 1 \quad (e > 1)$$

であるような点  $P$  の軌跡は (1.6) であることが示された. ■

この方程式 (5.6) は,  $x, y$  の符号の任意性を許すから,  $x$  軸,  $y$  軸に関する対称性を持ち, 従って  $F'(-ae, 0)$ ,  $d: x = -\frac{a}{e}$  も, それぞれ焦点, 準線となる.

Figure 1.5 (p. 8) で,  $A(a, 0)$ ,  $A'(-a, 0)$ ,  $B(0, b)$ ,  $B'(0, -b)$  とするとき,  $AA'$  を双曲線  $\mathcal{H}$  の『主軸 major axis』または『横断直径 transverse axis』,  $BB'$  を『副軸 minor axis』または『共役直径 conjugate axis』と呼び, また原点  $O$  を  $\mathcal{H}$  の『中心 center』と呼ぶ.

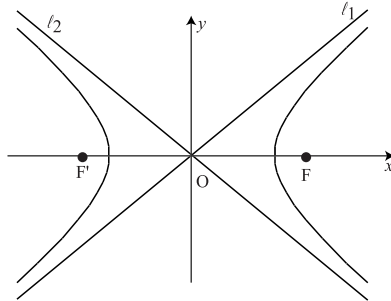
$x = a \sec t = \frac{a}{\cos t}$ ,  $y = b \tan t$  を代入してみると,

$$\frac{a^2 \sec^2 t}{a^2} - \frac{b^2 \tan^2 t}{b^2} = \frac{1}{\cos^2 t} - \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = 1$$

であるから, 点  $(a \sec t, b \tan t)$  は  $\mathcal{H}$  上にある. つまり  $\mathcal{H}$  のパラメータ表示として, 式 (1.7), つまり

$$x = a \sec t = \frac{a}{\cos t}, \quad y = b \tan t$$

Figure 1.6: 漸近線



が得られる．ただし  $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{\pi}{2} < t < \frac{3\pi}{2}$ .

ここで  $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$  のときは  $x = a \sec t > 0$  であり,  $\frac{\pi}{2} < t < \frac{3\pi}{2}$  のときは  $x = a \sec t < 0$  であるから, それぞれ  $y$  軸に関して右, 左の分岐 *branch* を描く.

もう 1 つ, 双曲線特有の性質として, 漸近線をもつことが挙げられる．いま, 直線

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0, \text{つまり } y = \pm \frac{b}{a}x$$

を考えると,  $x \rightarrow \infty$  のとき,  $\mathcal{H}$  のそれぞれの分岐はこれらの直線にいくらでも近づくことが解る (確かめよ!). この 2 直線  $y = \pm \frac{b}{a}x$  を, 双曲線  $\mathcal{H}$  の『漸近線 *asymptote*』と言う.

漸近線についてまとめておこう.

#### THEOREM 1.6 (双曲線の漸近線)

双曲線

$$\mathcal{H} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

は, 2 直線

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \iff y = \pm \frac{b}{a}x \quad (1.8)$$

を漸近線とする.

## § 1–5.

## 円錐曲線と極座標

### NOTE .

極座標と直交座標の区別を明確にするために, 通常の記法とは異なるが, 直交座標は parenthesis を用いて  $P(x, y)$  で, また極座標は bracket を用いて  $P[r, \theta]$  で表す.

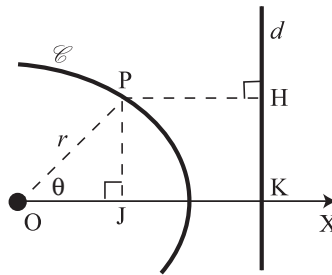
平面上に  $O$  と半直線  $OX$  を定める. 点  $P$  について  $PO = r$ , また  $\overrightarrow{OP}$  と半直線  $OX$  の, 反時計方向になす角が  $\theta$  であるとき, 点  $P$  は  $[r, \theta]$  と表すことができる. つまり  $r, \theta \in \mathbb{R}$  について,  $[r, \theta]$  はただ 1 つの点  $P$  を定める.  $r = 0$  のときは  $\theta$  は定義されないが, この場合には原点  $O$  を表すものと約束する.

ただし, 逆は成り立たない. つまり, 点  $P$  が定まっても, それを表す  $[r, \theta]$  は一意的ではない.  $2\pi$  の整数倍の任意性を許すからである. そこで,  $\theta$  の変域を幅が  $2\pi$  の半開区間  $]-\pi, \pi]$  または  $[0, 2\pi[$  などに制限することが多い. このようにして点の位置を表す座標を『極座標系 *polar coordinate system*』と言い,  $O$  を『極』, 半直線  $OX$  を『始線』と言う.

円錐曲線  $\mathcal{C}$  は, 定点  $F$  と定直線  $d$  との距離の比によって決定するのだから, 焦点  $F$  を極  $O$  にとり, 準線  $d$  を始線  $OX$  に直交するように極座標系を定めて,  $\mathcal{C}$  を考えてみよう.

始線  $OX$  と準線  $d$  との交点を  $K$  とする.  $\mathcal{C}$  上に点  $P$  をとり,  $P$  から  $d$  に下した垂線の足を  $H$ , また  $OX$  に下した垂線の足を  $J$  とする.

Figure 1.7: 極座標



円錐曲線の定義から,

$$OP = e \cdot PH$$

であり,  $PH = OK - OJ$  であるから, 次が成り立つ:

$$\begin{aligned} r &= e(OK - OJ) = eOK - er \cos \theta \\ \iff r(1 + e \cos \theta) &= e \cdot OK = l \text{ (const.)} \end{aligned}$$

これから次を得る:

**THEOREM 1.7 (円錐曲線と極方程式)**

円錐曲線は極座標系の方程式で

$$r = \frac{l}{1 + e \cos \theta} \tag{1.9}$$

と表される.

Zathematics

M3Ψ Winter, 2013.

Lecture 2

円錐曲線の性質



17 歳で『円錐曲線試論』 *Essai  
pour les coniques* (1640) を書いたパスカル.  
(Blaise Pascal 1623-62)

Department of Mathematics

---

ある古人は、算術と幾何は数学の両翼だと言った。私はたとえでなく、この2つの学科は量を研究するすべての学問の基礎であり本質であると思う。

しかし、それらは基礎であるだけではない。この2つが相互に補完するところが重要なのだ。というのは、ある結果が得られると、その結果は数または線に置き換えられ、数に置き換えるためには算術が必要とされ、線に置き換えるには幾何が必要になるからである。

ラグランジュ Lagrange, Joseph Louis (1736-1813)

イタリアで生まれ、フランスで活躍した大数学者。

あのナポレオンは、ラグランジュを評して  
「数学の誇り高きピラミッド」と言ったという。

---

# Lecture 2

## 円錐曲線の性質

### Theme

|                     |    |
|---------------------|----|
| 2.1 楕円・双曲線の焦点に関する距離 | 13 |
| 2.2 円錐曲線と接線・反射      | 14 |
| 2.3 共役な弦, 共役な方向     | 16 |

### § 2-1.

### 楕円・双曲線の焦点に関する距離

楕円・双曲線についての, **Lecture 1** での定義から, 次の 2 つの重要な, 決定的性質が導かれる. ここで, 『決定的』という言葉は, 厳密な意味で用いられている. determinative であり, critical であり, かつ characteristic である, という意味である. それは, 以下の定理<sup>2.1</sup>を, 逆に楕円・双曲線の定義にする minor な流儀があることから解る.

#### THEOREM 2.1 (楕円における Focal Distance)

$F, F'$  を焦点とする楕円  $\mathcal{E}$  では,  $\mathcal{E}$  上の点  $P$  から 2 焦点  $F, F'$  までの距離の和は一定であり, それは長軸  $AA'$  の長さに等しい:

$$P \in \mathcal{E} \iff PF + PF' = 2a \quad (\text{const.})$$

*Proof.*

$d, d'$  を, それぞれ  $F, F'$  に対応する準線とする. このとき,

$$PF = e \cdot \text{dist}(P, d), \quad PF' = e \cdot \text{dist}(P, d')$$

であるから,

$$PF + PF' = e \cdot \text{dist}(d, d') = 2a \quad (\text{const.})$$

■

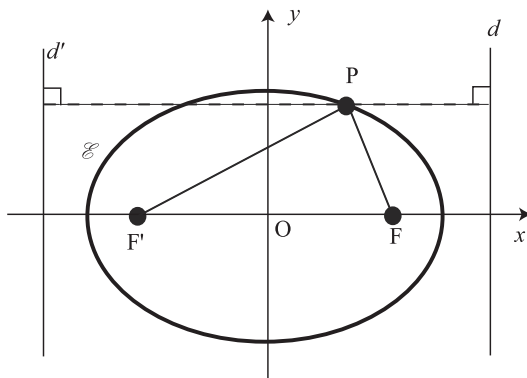
同様に次が成り立つ:  $a > 0$  とする.

#### THEOREM 2.2 (双曲線における Focal Distance)

$A(a, 0), A'(-a, 0)$  とする.  $F, F'$  を 2 焦点とする双曲線  $\mathcal{H}$  が  $A, A'$  を主軸にもつとする. このとき,

<sup>2.1</sup>‘focal distance’ を『焦点距離』と訳すわけにはいかず, 困っている. 「焦点に関わる距離」というところであろう.

Figure 2.1: 楕円と focal distance



P が F に近い方の分岐にあれば  $PF' - PF = AA'$ ,  
 P が F' に近い方の分岐にあれば  $PF - PF' = AA'$ .

つまり

$$P \in \mathcal{H} \iff |PF - PF'| = 2a \text{ (const.)}.$$

*Proof.*

*Who should do it?*

■

## § 2-2.

## 円錐曲線と接線・反射

次の、微分積分学の定理を確認しておこう。

### Proposition 2.3

平面曲線  $\mathcal{C}$  の parameter 表示が

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

で与えられているとき,

$\mathcal{C}$  上の点  $(x(t_0), y(t_0))$  で  $\mathcal{C}$  に引いた接線の傾き  $k$  は

$$k = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \bigg|_{t=t_0} \quad (2.1)$$

である。ただし、 $x'(t_0) \neq 0$  とする。

□

これを用いれば、次の定理を導くのは容易である。

**THEOREM 2.4 (円錐曲線の接線)**

$\mathcal{C}$  を円錐曲線とする.  $\mathcal{C}$  上の点  $P(X, Y)$  における  $\mathcal{C}$  に引いた接線は, それぞれ次のようになる:

¶1 楕円  $\mathcal{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  の接線は  $\frac{Xx}{a^2} + \frac{Yy}{b^2} = 1$ .

¶2 双曲線  $\mathcal{H} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  の接線は  $\frac{Xx}{a^2} - \frac{Yy}{b^2} = 1$ .

¶3 放物線  $\mathcal{P} : y^2 = 4ax$  の接線は  $Yy = 2a(x + X)$ .

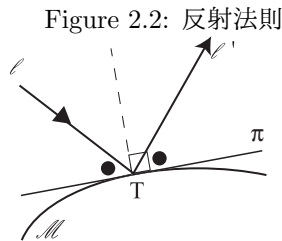
双曲線と楕円を比べてみれば, 一方で導いた方針が, 他方でもほとんど同じようにして使えるのが, とりかかる前から見えるはずである. 確認として示してみるとよい.

次に反射の問題に進んでみよう. 次を認めることにする:

**Proposition 2.5**

曲面  $\mathcal{M}$  に光線  $\ell$  が衝突する点を  $T$  とし,  $T$  における  $\mathcal{M}$  の接平面を  $\pi$  とする.  $\ell$  が  $\pi$  となす角 (入射角) は,  $\ell$  が  $\mathcal{M}$  で反射してできる直線  $\ell'$  が  $\pi$  となす角 (反射角) に等しい.

□



3 種類の円錐曲線について, 次が成り立つ (Figure 2.3 (p. 16) を参照のこと):

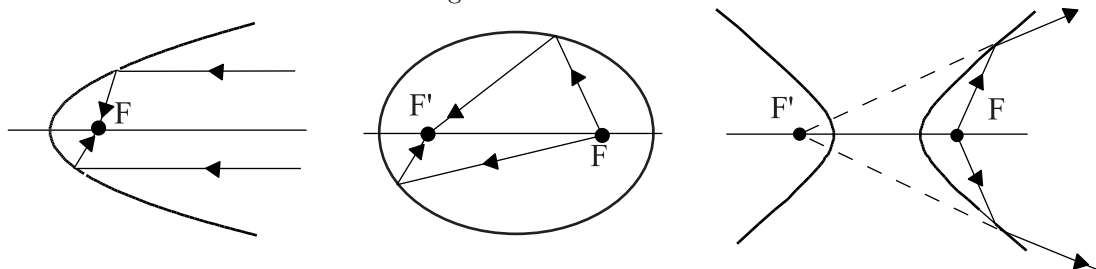
**THEOREM 2.6 (円錐曲線と反射)**

§1 放物線. 軸に平行な光線が入射するとき, 放物線  $\mathcal{P}$  で反射した光線は, 焦点に集まる.

§2 楕円. 一方の焦点  $F$  から出た光線が楕円  $\mathcal{E}$  で反射するとき, 反射光線はもう一方の焦点  $F'$  に集まる.

§3 双曲線. 一方の焦点  $F$  から出た光線が双曲線  $\mathcal{H}$  で反射するとき, 反射光線は他の焦点  $F'$  と反射点を結ぶ直線の方法に拡散する.

Figure 2.3: 反射法則



すべて、反射点  $P$  での接線と  $\triangle PFF'$  を考えて、その『内角・外角』という概念を軸にして整理してみるとよい……でスマセヨーと思ったが、心優しい kymst は、楕円と双曲線の場合について整理しておくのであった…….

### THEOREM 2.7 (接線と角)

#### ¶1 楕円.

- 焦点  $F, F'$  をもつ楕円  $\mathcal{E}$  の、その周上の点  $P$  での接線は、 $\triangle PFF'$  の頂点  $P$  における外角を 2 等分する.
- $P$  における  $\mathcal{E}$  の法線 vector は、 $\angle FPF'$  を 2 等分する.

#### ¶2 双曲線.

- 焦点  $F, F'$  をもつ双曲線  $\mathcal{H}$  の、その周上の点  $P$  での接線は、 $\triangle PFF'$  の内角  $\angle FPF'$  を 2 等分する.
- $P$  における  $\mathcal{H}$  の法線 vector は、 $\triangle PFF'$  の頂点  $P$  における外角を 2 等分する.

そして 受講生思いの kymst は、証明を **TASK** として受講生諸君に残しておくのであった…….

## § 2-3.

## 共役な弦、共役な方向

円錐曲線の円錐曲線たる性質はここにある、と言っても過言ではない、重要な性質に進もう。円錐曲線の弦の方向 vector に関わる概念である。そして、まさにこの方向 vector を考えることによってこそ、円錐曲線の特殊な場合としての円が、その姿を現すのである。

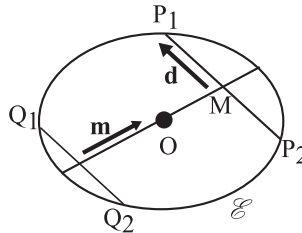
方向と来れば、当然 vector である。それ以外に、我々は為すすべをもたないのだ。ところで、この国の高校数学を悪くしているものが 3 つある。

2 次方程式の判別式、放物線の軸の分類、そして vector の矢印

である。この text では矢印を用いずに, vector をローマン体の太字  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{d}$ ,  $\mathbf{n}$  などで表す。

ただし, 2 点  $A, B$  が与えられたとき,  $A$  から  $B$  へと向かう vector は,  $\overrightarrow{AB}$  とする。<sup>2.2</sup>

Figure 2.4: 共役な方向



いま, 楕円を例にとり, その方程式が

$$\mathcal{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

であるとする。両辺に  $a^2b^2$  をかければ,  $\mathcal{E}$  の方程式は

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

である。

ある vector  $\mathbf{a}$  が与えられたとき,  $\mathbf{a}$  を単位 vector 化した vector とは,  $\mathbf{e} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$  のことである。これを, 「正規化 **normalization**」と言う。

正規化された方向 vector  $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$  をもつ直線  $\ell$  が  $\mathcal{E}$  と交わる点を  $P_1, P_2$  とする (ここで  $|\mathbf{d}| = 1$  であるから,  $\lambda^2 + \mu^2 = 1$ .)。楕円の弦  $P_1, P_2$  の中点を  $M$  とし, その座標を  $(X, Y)$  としよう。

直線  $\ell$  の parameter 表示は,  $t$  を実長 parameter として,

$$x = X + \lambda t, \quad y = Y + \mu t$$

をもつ。  $t$  がある値をとるとき, この表示は  $\ell$  上の点  $P_1, P_2$  を表すから, それをそれぞれ  $\alpha, \beta$  としよう。このとき,  $P_1, P_2$  は

$$P_1(X + \alpha\lambda, Y + \alpha\mu), \quad P_2(X + \beta\lambda, Y + \beta\mu)$$

となる。これら 2 点は楕円  $\mathcal{E}$  上の点であるから, その方程式に代入したときに成り立つはずである。逆に言えば,  $\alpha, \beta$  は, 楕円  $\mathcal{E}$  の方程式と, 直線  $\ell$  の parameter 表示とからできる  $t$  の方程式

$$b^2(X + t\lambda)^2 + a^2(Y + t\mu)^2 = a^2b^2$$

<sup>2.2</sup>このように, 2 点が与えられたときの vector を『束縛vector』と言い, そうでなく  $\mathbf{a}$  のような vector を『自由vector』と言うことがある。

の 2 解である。  $t$  について整理すれば、次を得る：

$$(b^2\lambda^2 + a^2\mu^2)t^2 + 2(b^2\lambda X + a^2\mu Y)t + b^2X^2 + a^2Y^2 - a^2b^2 = 0.$$

$\alpha, \beta$  はこの 2 次方程式の 2 解であり、かつ  $M$  は線分  $P_1P_2$  の中点であるから、

$$\alpha + \beta = 0$$

である。解と係数の関係から、

$$-\frac{2(b^2\lambda X + a^2\mu Y)}{b^2\lambda^2 + a^2\mu^2} = 0 \quad \therefore b^2\lambda X + a^2\mu Y = 0$$

を得る。この式は何を意味するか？その通り、方向 vector  $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$  をもつ任意の直線  $\ell$  が  $\mathcal{E}$  と交わってできる弦の中点が  $M(X, Y)$  であった。その  $X, Y$  について

$$b^2\lambda X + a^2\mu Y = 0 \tag{2.2}$$

が成り立つのだから、中点  $M$  は常にこの式をみたす。よく見ると、これは直線の方程式である。この直線を  $m$  としよう。その法線 vector は  $\begin{pmatrix} b^2\lambda \\ a^2\mu \end{pmatrix}$  であるから、傾きは  $-\frac{b^2\lambda}{a^2\mu}$  であり、楕円の中心 (原点)  $O$  を通る直線  $y = -\frac{b^2\lambda}{a^2\mu}x$  である。

つまり、直線  $\ell$  が方向 vector として  $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$  をもつ限りで、弦の中点は直線  $b^2\lambda X + a^2\mu Y = 0$  上にあるのだから、これは中点  $M$  の軌跡であると考えることができる。この直線の方向 vector が、 $\ell$  の方向 vector だけに依存していることに注意して欲しい。 $\ell$  の方向 vector  $\mathbf{d}$  と、中点の軌跡としての直線  $m$  の方向 vector  $\mathbf{m}$  は、一方が定まれば他方がそれに応じて定まる。

この 2 つの vector  $\mathbf{d}, \mathbf{m}$  は、『互いに共役である *conjugate to each other*』と言われる。

ところで、直径の定義とは何だろうか。円の直径は「中心を通る弦」であった。では、楕円では？そもそも、

### 『平行弦の中点が 1 直線上に並ぶ』

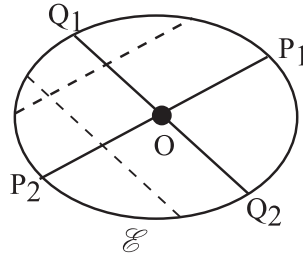
ことが、まず驚異なのだ。円の直径は、確かに、それに垂直な弦を 2 等分する。そこで、次のように定義しよう。一般の曲線  $\mathcal{C}$  についての定義であることを銘記せよ。

#### Definition 2.8 (曲線の直径)

平面曲線  $\mathcal{C}$  の平行な弦が、ある直線または線分によってすべて 2 等分されるとき、その直線もしくは線分を  $\mathcal{C}$  の直径 *diameter* と呼ぶ。

上で示したように、楕円  $\mathcal{E}$  においては、弦が 1 つ定まればその方向 vector  $\mathbf{d}$  が定まり、それに応じて直径の方向 vector  $\mathbf{m}$  が定まったのだ。特に、2 本の弦がどちらも直径で、かつ共役な方向 vector をもつとき、その 2 本の直径を『共役直径 *conjugate diameter*』と言う。円錐曲線の性質は、この『方向の共役性』に帰因するものが多い。

Figure 2.5: 共役直径



以上をまとめ、また他の円錐曲線についても触れておこう。

**THEOREM 2.9 (円錐曲線の直径)**

¶1 放物線  $\mathcal{P}: y^2 = 4ax$  の、傾き  $m$  の平行弦に共役な直径は、 $y = \frac{2a}{m}$  であり、直径の端点は  $\left(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}\right)$  である。

¶2 楕円  $\mathcal{E}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  の、傾き  $m$  の平行弦に共役な直径は  $y = -\frac{b^2}{a^2m}x$  である。

2 直径  $y = mx$ ,  $y = m'x$  が共役な直径であるとき、

$$mm' = -\frac{b^2}{a^2}.$$

¶3 双曲線  $\mathcal{H}: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  の、傾き  $m$  の平行弦に共役な直径は  $y = \frac{b^2}{a^2m}x$  である。

2 直径  $y = mx$ ,  $y = m'x$  が共役な直径であるとき、

$$mm' = \frac{b^2}{a^2}.$$

---

**MEMORANDUM**

---



Zathematics

M3Ψ Winter, 2013.

Lecture 3

円錐切断



「ペンの力が知力を凌いでいた」オイラー.  
(Leonhard Euler, 1707-1783)

Department of Mathematics

---

純粋数学とは、思考理論の詩である。数学者たちは、できるだけ広い範囲の形式的関係を、簡潔かつ論理的に、またそれらになるべく同じ一つの形で包摂することを可能にするような、演算法則を見つけようと努め、更にそれを一般的に表現する表記法を発見しようとしている。

自分たちの考え方の論理的なスマートさを達成しようと努めているうちに、いつのまにか彼らは、自分の外にある自然を支配している法則、自然を洞察するための公式を見つけたのだ。

アインシュタイン． Albert Einstein.(1879-1955)  
言わずと知れた、あのアインシュタインである。

---

# Lecture 3

## 円錐切断

### Theme

|                              |    |
|------------------------------|----|
| 3.1 いくつかの定義と初等的概念 . . . . .  | 23 |
| 3.2 円錐切断としての 2 次曲線 . . . . . | 24 |
| 3.3 ダンデリンによる証明 . . . . .     | 25 |

### § 3-1.

### いくつかの定義と初等的概念

まず最も単純な、空間内の曲面として円錐面を考えよう。直円錐 (*right cone*) とは、円錐の頂点 (vertex)  $V$  と底面の中心  $K$  を結んだ直線  $VK$  (これを円錐の「軸 (axis)」と言う) が、底面の円を含む平面  $\beta$  と垂直であるような円錐である。

円錐の底面をなす円を「底円」 $\mathcal{B}$  と呼ぶことにしよう。  $\mathcal{B}$  上の 1 点  $T$  と頂点  $V$  とを結ぶ直線、もしくは線分  $VT$  を、この円錐の「母線」 (*generator*) と言う。

Figure 3.1: 円錐と極・極線

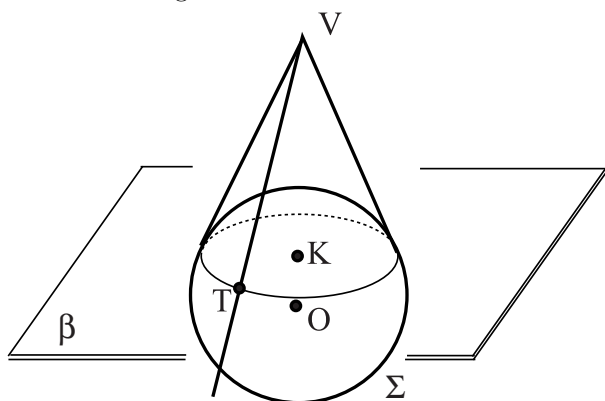


Figure 3.2: 断面

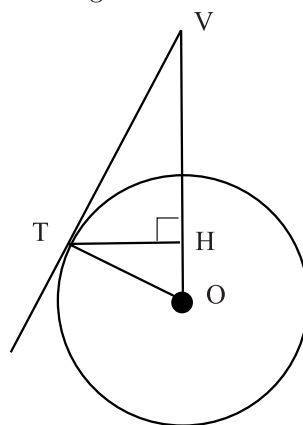


Fig. 3.1 (p.23) で、直円錐のすべての母線が接するような球面  $\Sigma$  を考える。このとき、円錐の底円  $\mathcal{B}$  は  $\Sigma$  の小円となる。底円  $\mathcal{B}$  上の点  $T$  は軸  $VK$  に垂直な平面上にある。定点  $V$  と球面  $\Sigma$  に着目するとき、円錐面  $\mathcal{K}$  と底円を含む平面  $\beta$  は、 $V$  と  $\Sigma$  により一意的に定まる (観点の自覚的転倒! 多視点的の世界理解!! )。

平面  $\beta$  を、点  $V$  の球面  $\Sigma$  に関する「極平面 (polar)」と言い、逆に点  $V$  を、平面  $\beta$  の球  $\Sigma$  に関する「極 (pole)」と言う。平面上での点と円について、類比的な概念があったことを思い出して欲しい。

$V$  から  $\beta$  に下した垂線の足を  $H$  とすれば、 $\triangle OTV$  で考えて、

$$OH = \frac{OT^2}{OV} = \text{const.}$$

であるから、 $H$  は線分  $VO$  上の定点となる。

$$TH^2 = OH \cdot VH = \text{const.}$$

だから、線分  $TH = \text{const.}$  となり、 $H$  は円錐  $\mathcal{K}$  の底円の中心  $K$  に一致する。

## § 3-2. 円錐切断としての 2 次曲線

円錐 (または円錐面)  $\mathcal{K}$  を平面  $\sigma$  で切断するとき、その交線として得られる (退化していない) 曲線  $\gamma$  を

円錐切断, 円錐曲線 (conic section, conic curve)

と言う。これらの曲線が、2 次曲線、つまり

楕円 (円を含む), 放物線, 双曲線

となることを示すのが、我々の主目的である。これを解析的に示すことは、**TASK** に回す。ただし、その際の着眼点を述べておこう。

円錐を固定して、いろいろな平面で切断することを考えると、切断平面  $\sigma$  を動かすことになり、依存する parameter が多くなる。そこで、球面  $\Sigma$  を固定し、 $\Sigma$  の外部に点  $V$  をとる。このとき円錐の底面は  $\Sigma$  の  $V$  に関する極平面として得られる。

$\Sigma$  の中心を原点  $O$ 、半径を 1 とすれば、

$$\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

また、点  $V$  は  $\Sigma$  の外部にあればよい。回転対称性を考えて  $V(2, 0, a)$  (ただし  $a > 0$ ) とする、つまり、 $V$  を  $xz$  平面上にとる。

$y$  軸がつぶれる方向から  $xz$  平面を見ると、 $z$  座標  $a$  の値によって次の Fig.3.3(p. 25) のように 3 通りの場合がある。

このそれぞれの場合に、 $V$  を通り球面  $\Sigma$  に接する直線束としての円錐面  $\mathcal{K}$  と、 $xy$  平面との交線  $\gamma$  が、円錐の切断 conic section となる。この交線が、『円錐曲線』conic curve と呼ばれるわけである。定理としておこう。

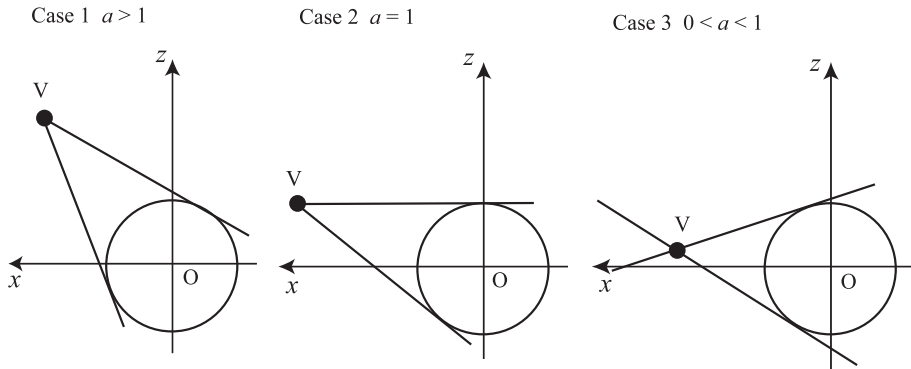
### THEOREM 3.1 (円錐の切断)

上の切断において得られる、円錐面  $\mathcal{K}$  の  $xy$  平面による切断交線  $\gamma$  は

- Case 1  $a > 1$  のとき楕円 ellipse,
- Case 2  $a = 1$  のとき放物線 parabola,
- Case 3  $0 < a < 1$  のとき双曲線 hyperbola

となる.

Figure 3.3:  $xy$  平面による切断

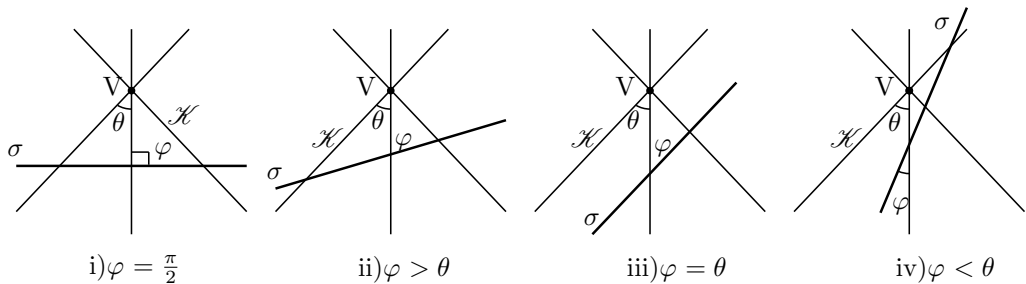


### § 3-3.

### ダンデリンによる証明

円錐面を  $\mathcal{K}$ ,  $\mathcal{K}$  の母線が軸となす角を  $\theta$ , また軸と切断平面  $\sigma$  のなす角を  $\varphi$  とする. ただし  $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$ . このとき, 軸を含み, かつ切断平面  $\sigma$  と垂直な平面での断面は下の Fig. 3.4 のようになる:

Figure 3.4: 円錐の軸と切断平面  $\sigma$



$\mathcal{K}$  と  $\sigma$  の交線  $\gamma$  が, i) のとき円になることは自明である. 更に,  $\gamma$  は

- ii)  $\varphi > \theta$  のとき楕円,
- iii)  $\varphi = \theta$  のとき放物線,

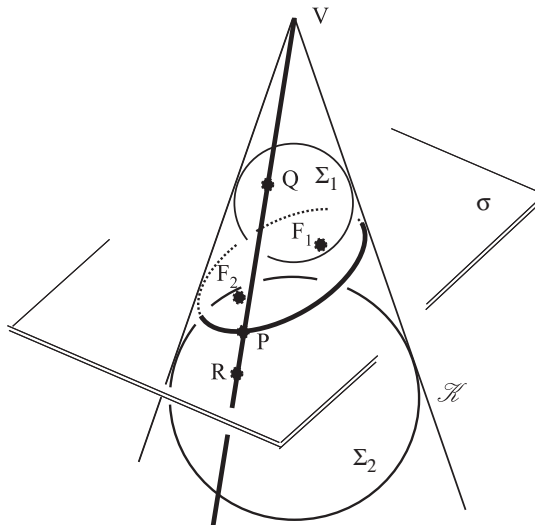
- iv)  $\varphi < \theta$  のとき双曲線

となる.

以下で, ii) の  $\varphi > \theta$  のとき,  $\gamma$  が楕円となること, そしてそれが, 楕円の基本性質とどのように関わるか? を示す.

直円錐  $\mathcal{K}$  の頂点を  $V$ , 切断平面を  $\sigma$  とする. 次の Fig. 3.5 を見られたい.  $\mathcal{K}$  に内接し, かつ  $\sigma$  に接する球は, このとき 2 個存在する.  $\sigma$  に関して  $V$  の側にある球を  $\Sigma_1$ ,  $V$  と反対側にある球を  $\Sigma_2$  とし, その中心をそれぞれ  $K_1, K_2$ , また平面  $\sigma$  との接点をそれぞれ  $F_1, F_2$  と定める.  $\sigma$  と  $\mathcal{K}$  の交線  $\gamma$  上に 1 点  $P$  をとり, 母線  $VP$  と球  $\Sigma_1, \Sigma_2$  との接点をそれぞれ  $Q, R$  とする.

Figure 3.5: 楕円が見えるか?



球  $\Sigma_1$  について  $PF_1 = PQ$ , 球  $\Sigma_2$  について  $PF_2 = PR$  であるから,

$$PF_1 + PF_2 = PQ + PR = QR = \text{const.}$$

Fig. 3.5 の円錐を,  $\mathcal{K}$  の軸を含み,  $\sigma$  に垂直な平面で切った断面図 Fig. 3.6 (p.27) を考える.

この断面図 Fig. 3.6 (p.27) で図のように点を定めると,  $QR = ST$ . ところがこれは  $AB$  に等しい. なぜならば,  $\triangle VAB$  の周長を  $2s$  と置くと

$$VT = s, \quad \text{また}$$

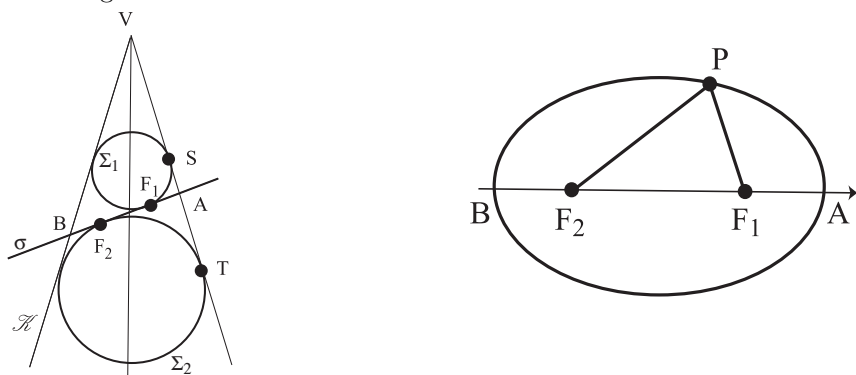
$$2VS = VA + VB - AB = 2s - 2AB \text{ であるから, } VS = s - AB$$

$$\therefore ST = VT - VS = AB.$$

まとめて

$$PF_1 + PF_2 = AB = \text{const.}$$

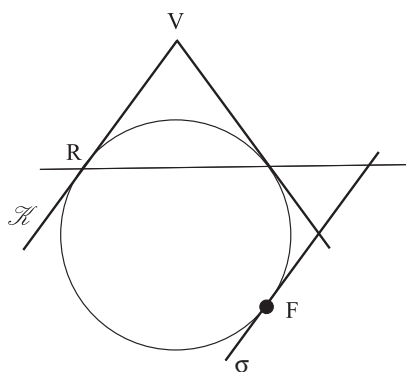
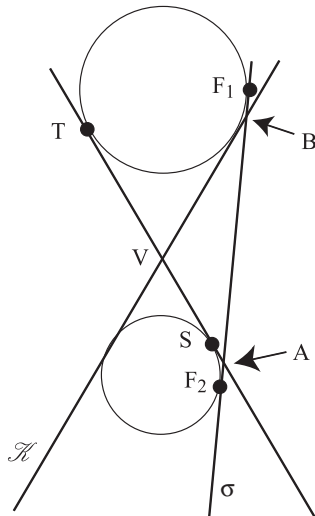
Figure 3.6: 軸平面での断面



となる．これが  $\mathcal{H}$  と  $\sigma$  の交線  $\gamma$  上の任意の点  $P$  について成り立つから，切断の交線  $\gamma$  は  $AB$  を主軸（長径）とする楕円となる．

他の場合についても，断面図を与えておく． Fig. 3.7 (p.27) を見られたい．

Figure 3.7: 放物線と双曲線……が見えるか？

iii)  $\phi = \theta$ iv)  $\phi < \theta$ 

定理としておこう．

**THEOREM 3.2 (軸と切断面の交角)**

円錐面  $\mathcal{H}$  の母線が， $\mathcal{H}$  となす角を  $\theta$ ，また平面  $\sigma$  が  $\mathcal{H}$  の軸となす角を  $\varphi$  とする．ただし  $0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ ．このとき， $\mathcal{H}$  と  $\sigma$  との交線  $\gamma$  について，次が成り立つ．

- Case 1.  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  のとき,  $\gamma$  は円に,
- Case 2.  $\varphi > \theta$  のとき,  $\gamma$  は楕円に,
- Case 3.  $\varphi = \theta$  のとき,  $\gamma$  は放物線に,
- Case 4.  $\varphi < \theta$  のとき,  $\gamma$  は双曲線に,

なる.

楕円について上で示した証明, つまり円錐面に内接する 2 球を考える, という証明を, 「ダンデリンの証明」と言う. その定理は次のようにまとめられる:

**THEOREM 3.3 (Theorem of Dandelin.)**

Foci of a conic section can be defined as the points at which the cutting plane is tangent to spheres inscribed in the cone ( in the case of a parabola, a single sphere ), while the directrices of the conic section are the lines in which the cutting plane intersects the planes of the circles in which the spheres are tangent to the cone.

もう一つ, 見やすい図を挙げておこう. Figure 3.8 (p. 28) を見られたい.

Figure 3.8: ダンデリンの球

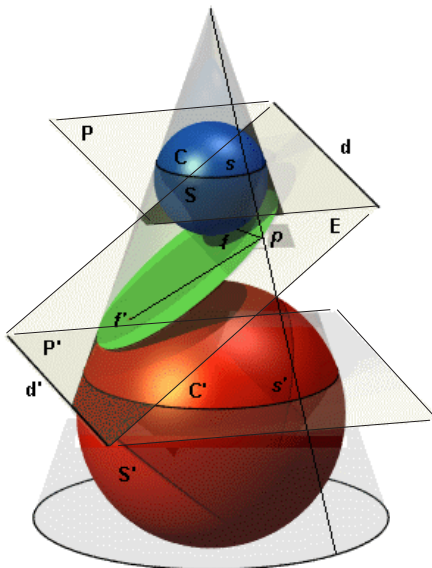


Figure 3.9: ダンデリン



ダンデリン (Germinal Pierre Dandelin, 1794 - 1847.)<sup>3.1</sup>はベルギーの数学者である。解析的手法が主であったなかで、総合的・初等的な方法によって焦点と準線が存在とその幾何学的な決定を示した業績は大きい。この成果は論文 *Sur quelques propriétés remarquables de la focale parabolique*. Nouv. mém. Acad. Bruxelles, 1882.<sup>3.2</sup> で示された。

上の英文をキチッと読めば、我々が示した定理は、ダンデリンの定理の前半でしかないことが解る。だから、どーする？

代数的 (形式的) に曲線論を展開するというのが、我々の方針であった。しかし、そうした処理は、総合的な視点を得て、初めて幾何学的対象の全的・統一的把握に繋がる。ただ単に式を処理するだけでは、幾何学ではない。直感と論理、幾何学的眼差しと解析・代数的処理、それが融合する地平にこそ、豊穡で肥沃な数学が育まれるのだ。

---

<sup>3.1</sup><http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/References/Dandelin.html> から転載した。

<sup>3.2</sup>*Mathematics of the 19th Century. Geometry, Analytic Function Theory.*  
A. N. Kolmogorov / A. P. Yushkevich eds. Basel, 1996. p. 4.

---

**MEMORANDUM**

---



Zathematics

M3Ψ Winter, 2013.

Lecture 4

平面上の変換 — 等長変換



エルミート. Charles Hermite (1822-1901).  
フランス生れの数学者. 自然対数の底  $e$  が  
超越数であることを証明した. また,  
『エルミート行列』でも有名.

Department of Mathematics

---

数や関数はわれわれの理性が勝手に作りだしたものではなかろう。私が思うには、現実の世界のものと同じ必然の力によってそれらはわれわれの外部に存在しており、われわれはそれらと出会って、物理学者や化学者や動物学者がするのと同じように詳しくそれらをしらべるのである。

エルミート。彼については前のページを参照されたい。

---

# Lecture 4

## 平面上の変換 — 等長変換

### Theme

|                  |    |
|------------------|----|
| 4.1 線形変換         | 33 |
| 4.2 等長変換から……     | 35 |
| 4.3 ……Euclid 変換へ | 37 |
| 4.4 行列と 2 次曲線    | 39 |
| 4.5 座標系の変換       | 40 |
| 4.6 2 次曲線の標準化    | 43 |

### § 4-1.

### 線形変換

平面  $\pi$  上に座標系  $[O; xy]$  が定義されているとき、点  $P(\mathbf{p})$  を  $P'(\mathbf{p}')$  に移す規則  $\tau: \pi \rightarrow \pi$  を

平面  $\pi$  上の変換 *transformation*

と言う。  $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{p}' = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$  とすれば、これは、次のように表される：

$$\tau: P(\mathbf{p}) \mapsto P'(\mathbf{p}') \quad \text{または} \quad \tau: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}.$$

今、変換規則  $\tau$  が次の『線形条件』 *Condition of Linearity* **CL** をみたすときを考えよう。

$$(\mathbf{CL}): \tau \text{ が } \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ と表される.}$$

つまり **CL** とは、

$X, Y$  が、それぞれ  $x, y$  の定数項を含まない 1 次式で表される

という条件である。このような 1 次式を「斉次 1 次式 *homogeneous linear polynomial* 」と言う。

ある変換  $\tau$  について、この条件 **CL** が成り立つとき、この変換  $\tau$  を

平面  $\pi$  上の線形変換、または 1 次変換 *linear transformation*

と言う.

$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  と置けば,  $\tau$  が **CL** をみたすとき

$$\tau(\mathbf{p}) = \mathbf{A}\mathbf{p}$$

と表される. このとき  $\mathbf{A}$  を

線形変換  $\tau$  を表す行列, または  $\tau$  の表現行列 *representation matrix*

と言う. また,  $\tau(\mathbf{p})$  を  $\tau$  による  $\mathbf{p}$  の像 *image*,  $\mathbf{p}$  を  $\tau(\mathbf{p})$  の逆像 *inverse image* と言う.  
次の定理が基本的である:

**THEOREM 4.1 (線形変換の基本性質)**

$\tau$  を線形変換,  $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^2, k \in \mathbb{R}$  とすると, 次が成り立つ:

$$(1) \tau(\mathbf{p} + \mathbf{q}) = \tau(\mathbf{p}) + \tau(\mathbf{q}).$$

$$(2) \tau(k\mathbf{p}) = k\tau(\mathbf{p}).$$

また逆に, 変換  $\tau$  についてこのいずれれもが成り立つならば, その変換  $\tau$  は線形変換である, つまり線形性条件 **CL** をみたす.

*Proof.* まず  $\Rightarrow$  を示す:  $\tau$  を線形変換とし,  $\mathbf{A}$  をその表現行列とする.

$\tau(\mathbf{p}) = \mathbf{p}'$ ,  $\tau(\mathbf{q}) = \mathbf{q}'$  とするとき,

$$(1) \tau(\mathbf{p} + \mathbf{q}) = \mathbf{A}(\mathbf{p} + \mathbf{q}) = \mathbf{A}\mathbf{p} + \mathbf{A}\mathbf{q} = \tau(\mathbf{p}) + \tau(\mathbf{q}).$$

$$(2) \tau(k\mathbf{p}) = \mathbf{A}(k\mathbf{p}) = k\mathbf{A}\mathbf{p} = k\tau(\mathbf{p}).$$

よって確かに (1), (2) が成り立つ.

次に  $\Leftarrow$  を示す:  $\tau$  を任意の変換とし,  $\tau$  によって  $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  が  $\mathbf{p}' = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$  に移ったとする:

$$\tau \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}.$$

基本 vector を  $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  と置けば,  $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$ .

$\tau(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ ,  $\tau(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$  とすれば,

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \iff \begin{cases} X = ax + by \\ Y = cx + dy \end{cases} \iff \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

よって  $\tau$  は確かに線形性条件 **CL** をみたす. ■

この証明から、次の系が示されたことになる：

**Corrolary 4.2**

線形変換  $\tau$  の表現行列を  $\mathbf{A}_\tau$  とすると、

$\mathbf{A}_\tau$  の第 1 列は  $\mathbf{e}_1$  の像  $\tau(\mathbf{e}_1)$ ,  $\mathbf{A}_\tau$  の第 2 列は  $\mathbf{e}_2$  の像  $\tau(\mathbf{e}_2)$

である。従って、表現行列  $\mathbf{A}_\tau$  は、

$$\mathbf{A}_\tau = (\tau(\mathbf{e}_1) \ \tau(\mathbf{e}_2))$$

である。 □

変換の合成と逆変換に、話題を進めよう。  $\tau_1, \tau_2$  を任意の変換とする。  $\tau_1$  によって vector  $\mathbf{p}$  が vector  $\mathbf{q}$  に移され、その  $\mathbf{q}$  が  $\tau_2$  によって vector  $\mathbf{r}$  に移ったとする：

$$\mathbf{p} \xrightarrow{\tau_1} \mathbf{q} \xrightarrow{\tau_2} \mathbf{r}$$

このとき、

$$\mathbf{r} = \tau_2(\mathbf{q}) = \tau_2(\tau_1(\mathbf{p}))$$

と表される。この、 $\mathbf{p}$  を  $\mathbf{r}$  に移す変換  $\tau$  を  $\tau_1$  と  $\tau_2$  の合成変換 *composite transformation* と呼び、

$$\tau = \tau_2 \circ \tau_1$$

と表す。つまり  $\tau_2 \circ \tau_1(\mathbf{p}) = \tau_2(\tau_1(\mathbf{p}))$  である。

また、任意の変換  $\tau$  について、 $\mathbf{q} = \tau(\mathbf{p})$  とする。特に、 $\tau$  が 1 対 1 の変換 *one-to-one correspondence* であるとき、 $\mathbf{q}$  を  $\mathbf{p}$  に移す (戻す) 変換を考えることができる。この変換を  $\tau$  の逆変換 *inverse transformation* と呼び、 $\tau^{-1}$  で表す：

$$\mathbf{p} \xrightarrow{\tau} \mathbf{q} \iff \mathbf{q} \xrightarrow{\tau^{-1}} \mathbf{p}.$$

次の定理が基本的である：

**THEOREM 4.3** (合成変換・逆変換とその表現行列)

$\tau, \sigma$  を線形変換とし、その表現行列をそれぞれ  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  とする。

- (1)  $\tau$  と  $\sigma$  の合成変換  $\sigma \circ \tau$  もまた線形変換であり、この変換  $\sigma \circ \tau$  の表現行列は  $\mathbf{BA}$  である。
- (2) 線形変換  $\tau$  が逆変換をもてば、 $\tau$  の表現行列は正則であり、 $\tau$  の逆変換  $\tau^{-1}$  の表現行列は  $\mathbf{A}$  の逆行列  $\mathbf{A}^{-1}$  である。

平面  $\pi = \mathbb{R}^2$  上のある変換  $\tau$  が、任意の vector  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$  についてその長さを不変に保つとき、つまり

$$\forall \mathbf{p} \in \mathbb{R}^2 : |\tau(\mathbf{p})| = |\mathbf{p}|$$

が成り立つとき、 $\tau$  は  $\pi = \mathbb{R}^2$  上の等長変換 *isometry, isometric transformation* と呼ばれる。

以下で、線形変換の中で等長変換であるもの、線形等長変換を考えよう。まず、次の定理が成り立つ：

**THEOREM 4.4 (回転と鏡映)**

$\tau$  を線形変換とし、 $\mathbf{A}_\tau$  をその表現行列とする。

(1) ある  $\theta \in \mathbb{R}$  について  $\mathbf{A}_\tau = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  であるとき、 $\tau$  は原点  $O$  を中心とする  $\theta$  だけの回転  $R_\theta$  を表す。

(2) ある  $\theta \in \mathbb{R}$  について  $\mathbf{A}_\tau = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$  であるとき、 $\tau$  は原点  $O$  を通り、 $x$  軸正方向とのなす角が  $\frac{\theta}{2}$  である直線  $\ell$  に関する対称移動—鏡映— $M_{\frac{\theta}{2}}$  を表す。

このどちらも等長変換である。

次に、 $\pi = \mathbb{R}^2$  上の等長線形変換をすべて決定することを考えよう。結論を先取りすれば、それはこの2つの変換、回転と鏡映に限る。これを示すために、直交行列 *orthogonal matrix* という概念を導入する。一般に、行列  $\mathbf{A}$  について、 $\mathbf{A}$  の転置行列が  $\mathbf{A}$  の逆行列に一致するとき、つまり

$${}^T\mathbf{A} = \mathbf{A}^{-1}$$

が成り立つとき、行列  $\mathbf{A}$  を直交行列と言う。

$$\mathbf{A} \text{ が直交行列} \iff {}^T\mathbf{A}\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

が成り立つ。

次の補題を示すことは容易である。

**Lemma 4.5**

$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  が直交行列であるとき、次が成り立つ：

(1)  $\det \mathbf{A} = \pm 1$ .

(2)  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2)$  について、 $\mathbf{a}_1 \perp \mathbf{a}_2$ .

(3)  $|\mathbf{a}_1| = |\mathbf{a}_2| = 1$ .

□

この Lemma から、次の定理が示される：

**THEOREM 4.6 (等長線形変換)**

$\pi = \mathbb{R}^2$  上の、等長性を保存する線形変換は、次の 2 つに限る：

- (1) 原点を中心とする回転  $R_\theta$ ,
- (2) 直線  $y = \left(\tan \frac{\theta}{2}\right)x$  に関する鏡映  $M_{\frac{\theta}{2}}$ .

そして表現行列はそれぞれ

$$\mathbf{A}_{R(\theta)} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_{M(\frac{\theta}{2})} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

である。

### § 4-3.

### ……Euclid 変換へ

これまでの等長変換は、線形等長変換であった。以下では、より一般の等長変換を考える。それは、ユークリッド変換と呼ばれる。線形変換とは  $\tau(\mathbf{p}) = \mathbf{A}\mathbf{p}$  であった。この変換により、 $\tau(\mathbf{o}) = \mathbf{A}\mathbf{o} = \mathbf{o}$  が成り立つから、原点  $\mathbf{o}$  は不動に保たれる。つまり、

線形変換は原点を不変に保つ

変換である。それは、正比例  $y = ax$  に似ている。関数  $f(x) = ax$  が線形性条件 **CL** をみたすことは、直ちに解る：

$$\begin{aligned} f(p+q) &= a(p+q) = ap + aq = f(p) + f(q), \\ f(kp) &= a \cdot kp = k \cdot ap = k \cdot f(p). \end{aligned}$$

「線形」とは、正比例の別表現に他ならない。 $y = ax$  は 1 次元の正比例であり、これまで考えてきた  $\mathbf{q} = \mathbf{A}\mathbf{p}$  とは、(とりあえずは)2 次元の正比例である。

こうした考え方をしたとき、では「長さの保存」、「等長性」は如何なる構図の内に取込まれるであろうか？

1 次元  $\mathbb{R}$  上での比例の場合、長さ、大きさを不変に保つのは、比例定数  $a$  が 1 の場合に限る：  
 $y = 1 \cdot x = x$ .

では 2 次元  $\mathbb{R}^2$  上での線形変換では？ その通り！線形変換  $\mathbf{q} = \mathbf{A}\mathbf{p}$  が等長性を保つのは、表現行列  $\mathbf{A}$  が直交行列である場合であり、かつその場合に限られた。直交行列の行列式  $\det \mathbf{A} = \pm 1$  であった。ここに、正比例との類比性が、鮮明に現れている。

しかし、我々がこれまで考えてきた変換は、すべて原点を不動に保つもののみであった。正比例の次には 1 次関数  $f(x) = ax + b$ ,  $b \neq 0$  が出てきたと同様、原点を保存しない変換で、等長性を保つものがある。その通り！これこそまさに平行移動に他ならない。思えば、3 個の移動、つまり

平行移動, 回転移動, 対称移動それぞれ *translation, rotation, reflexion*

を学んだのは, 3 角形の合同条件が出て来たよりも前のことであった. この 3 個の変換を

ユークリッド変換 *Euclid Transformation*

と言う.

行列を用いて定義してみよう.

**Definition 4.7 (Euclid 変換)**

平面  $\pi = \mathbb{R}^2$  上のユークリッド変換  $\tau$  とは, 次の形をした変換  $\tau : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  である :

$U \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  を直交行列,  $\mathbf{a}$  を平面 vector とするとき,

$$\tau(\mathbf{p}) = U\mathbf{p} + \mathbf{a}.$$

また, 平面  $\pi = \mathbb{R}^2$  上の Euclid 変換すべての集合を  $\mathbf{E}(2)$  で表す.

直交行列は線形等長変換を表し, また線形等長変換は回転と鏡映に限られたから, 次の定理は明らかであろう :

**THEOREM 4.8 (等長変換と Euclid 変換)**

平面  $\pi$  上の, 線形とは限らない等長変換は, すべて *Euclid* 変換であり, 逆も成り立つ.

あまり『群』の話題に深入りするつもりはないが, 変換が出てきたら, 群はツキモノであるから, 定義くらいはするべきだろう. ある集合の元の間に演算が定義されているとき, その集合と演算を合わせて考えたものを『代数系 *algebraic system*』と言う. 代数系の中で, 次で定義される『群』が最も重要である :

**Definition 4.9 (群)**

ある集合  $G$  と, その上で定義された演算  $\circ$  が, 次の条件をみたすとき,  $G$  と  $\circ$  とを合わせた対  $\langle G, \circ \rangle$  を群 *group* と言う.

(1)  $G$  は演算  $\circ$  について閉じている.

$$\forall x \forall y \in G \exists z \in G ; z = x \circ y.$$

(2) 演算  $\circ$  は結合的である.

$$\forall x \forall y \forall z \in G ; (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z).$$

(3)  $G$  の要素で, 次をみたすもの  $e$  がある. これを演算  $\circ$  の単位元という.

$$\exists e \in G \forall x \in G ; x \circ e = x \circ e = x.$$

(4)  $G$  のすべての要素は逆元をもつ.

$$\forall x \in G \exists y \in G ; x \circ y = y \circ x = e.$$

$x$  の逆元は、普通  $x^{-1}$  と書かれる。

そして、次の定理が成り立つ：

**THEOREM 4.10 (Euclid 変換群)**

平面  $\pi = \mathbb{R}^2$  上の、**Euclid** 変換すべてからなる集合  $\mathbf{E}(2)$  は群をなす。

## § 4-4.

## 行列と 2 次曲線

例えば、行列  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$  としよう。vector  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  について、次の式を計算してみよう：

$${}^T\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{x} = (x \ y) \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3x^2 + 5y^2.$$

もしこの値  $k$  が正であれば、方程式  ${}^T\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{x} = k$  は、楕円を表す。これは、ある円錐曲線の vector 方程式である。この式を、我々の標準形に直すことは、簡単である。そこで、このような形をした 2 次曲線  $\mathcal{C}$  の vector 方程式を

### vector 標準形

と呼ぶことにしよう。

**Definition 4.11 (vector 標準形 (1))**

有心 2 次曲線  $\mathcal{C}$  は、次の vector 標準形  ${}^T\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{x} - k = 0$  をもつ：

- I. 楕円  $\mathcal{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  は  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} b^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$ ,  $k = a^2b^2$ .
- II. 双曲線  $\mathcal{H} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$  は  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} b^2 & 0 \\ 0 & -a^2 \end{pmatrix}$ ,  $k = \pm a^2b^2$ .

更に、一般の 2 次曲線を改めて定義しよう。2 変数  $x, y$  についての 2 次式を  $f(x, y)$  とする：

$$f(x, y) = Ax^2 + Hxy + By^2 + Gx + Fy + C.$$

この  $f(x, y)$  について、 $f(x, y) = 0$  をみたす点  $(x, y)$  の集合  $\mathcal{C}$  を、**2 次曲線**と言う：

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\}.$$

また、後々の都合上、2 次式  $f(x, y)$  を

$$f(x, y) = ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c$$

の形で扱う。この 2 次式が、vector と行列を使って次のように書けることは容易に解る：

**Definition 4.12 (vector 標準形 (2))**

2 次式

$$f(x, y) = ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c$$

について、2 次曲線  $\mathcal{C} : f(x, y) = 0$  は、次の行列と vector による表現をもつ。

これを、一般 2 次曲線の **vector 標準形**と呼ぶことにする：

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix}, \mathbf{a} = \begin{pmatrix} g \\ f \end{pmatrix}, \text{ また } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ とすると,}$$

$$\mathcal{C} : {}^T\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{x} + {}^T\mathbf{a}\mathbf{x} + c = 0.$$

さらに、 $\tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{pmatrix}$  とすれば、 $\mathcal{C}$  は

$$f(x, y) = {}^T\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}} = 0$$

で表される。

**Note.**

次の 2 点に注意して欲しい。

- (1) 上の定義に出てきた行列  $\mathbf{A}$ ,  $\tilde{\mathbf{A}}$  は、すべて対称行列である。つまり、対角成分に対して対称になっている。特に、標準形で表されたとき、対角成分以外はすべて 0 となり、対角行列である。行列の対角化とは、 $n$  乗するための手段ではない！
- (2) 上で定めた方程式  $f(x, y) = 0$  は、例えば次のような方程式も含んでいる：

$$x^2 + y^2 = 0, \quad x^2 - 2xy + y^2 = 0, \quad x^2 - y^2 = 0, \quad x^2 + y^2 + 1 = 0.$$

これらの方程式をみたす点の集合は、それぞれ  $\{O\}$ , 直線  $x - y = 0$ , 2 直線  $x + y = 0$ ,  $x - y = 0$ , 及び空集合  $\emptyset$  となる。これらをいちいち例外扱いするのは、非数学的・非知性的である。これらもまた円錐「曲線」、2 次「曲線」として扱う。一様性の獲得のための、小さな犠牲でしかない。

## § 4-5.

## 座標系の変換

平面  $\pi$  上に 1 点  $O$  と、 $O$  で直交する 2 本の数直線が与えられたとき、その平面  $\pi$  に座標が定義されている、と言う。 $O$  を原点とし、2 直線の内、一方を  $x$  軸、他方を  $y$  軸に定めて、こ

れら3つのものを組にして直交座標系 *coordinate system* と言い、 $\langle O, xy \rangle$  と表す。この座標系によって、平面  $\pi$  にある種の数学的構造—それは『ユークリッド的構造』と言ってもよい—が持ち込まれる。標語的に言えば、

座標系によって平面  $\pi$  は  $\mathbb{R}^2$  に同一視される

のである。

平面  $\pi \ni P(x, y)$  が与えられたとしよう。  $x$  軸,  $y$  軸の基本 vector をそれぞれ  $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  とする。今後、これを簡略に

$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  は座標系  $\langle O, xy \rangle$  の基本 vector である

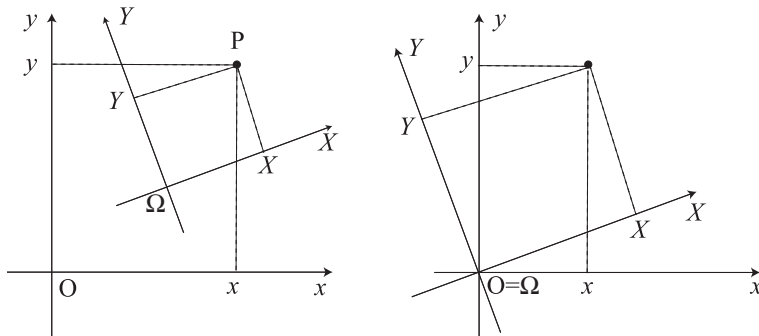
と言う。

平面  $\pi$  に、更に別の座標系  $\langle \Omega, XY \rangle$  が定められていたり、あるいは考える必要が生じたりすることがある。そのとき、一方の座標系で表されたある点は、別の座標系ではどのような座標をもつか？を考えること、つまり

#### 座標系の間の翻訳

を、座標変換 *coordinate transformation* と言う。

Figure 4.1: 座標変換



一般の座標変換は、Fig. 4.1 (p.41) の左のように、ズラシとマワシによって表されるが、ズラシ、つまり平行移動は、vector の加減によって行われるから、理解するのに困難はない。ここでは、回転変換を考えよう。座標系  $\langle O, xy \rangle$  と  $\langle \Omega, XY \rangle$  について、 $O = \Omega$ 、つまり原点が一致する場合である。

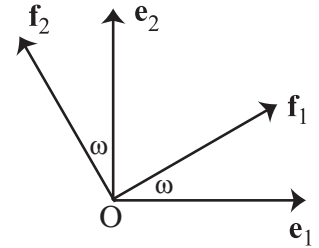
$\langle O, xy \rangle$  の基本 vector を  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 、また  $\langle O, XY \rangle$  の基本 vector を  $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$  とする。この平面  $\pi$  上の点 A が  $\langle O, xy \rangle$  で  $(x, y)$  と表されたとしよう。この点 A を、新たな座標系  $\langle O, XY \rangle$  で表すと、どうなるであろうか。つまり、

点の位置 (=意味) は不変のまま、別の座標 (=言語) で表現 (翻訳) する

ワケである.

新たな座標系  $\langle O, XY \rangle$  の基本 vector  $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$  が, 元の座標系  $\langle O, xy \rangle$  の基本 vector をそれぞれ  $\omega$  回転して得られるとしよう. 更に, 点 A が元の座標系で座標  $(x, y)$  をもつとする. 既に見たように, vector の回転は, ある直交行列, つまり行列式の値が 1 の直交行列で表される. いまその行列を  $\mathbf{P}$  とする:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad \det \mathbf{P} = \alpha^2 + \beta^2 = 1.$$



このとき,  $A(x, y)$  であるから, A の位置 vector  $\mathbf{x}$  は  $\mathbf{x} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$  である.  $\mathbf{f}_1 = \mathbf{P}\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{f}_2 = \mathbf{P}\mathbf{e}_2$  より, 逆の変換を考えれば,  $\mathbf{P}^{-1} = {}^T\mathbf{P}$  に注意して,

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{f}_1 = {}^T\mathbf{P}\mathbf{f}_1, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{f}_2 = {}^T\mathbf{P}\mathbf{f}_2$$

である. よって点 A の位置 vector について

$$\mathbf{x} = x{}^T\mathbf{P}\mathbf{f}_1 + y{}^T\mathbf{P}\mathbf{f}_2.$$

ここで, 基本 vector の変換行列による像は, その列で表されることに注意すれば,

$${}^T\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \text{ であるから, } {}^T\mathbf{P}\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \end{pmatrix}, \quad {}^T\mathbf{P}\mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}$$

となる. これらから, 次の式を得る:

$$\mathbf{x} = x \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\alpha + y\beta \\ -x\beta + y\alpha \end{pmatrix} = (x\alpha + y\beta)\mathbf{f}_1 + (-x\beta + y\alpha)\mathbf{f}_2.$$

つまり, 点 A の, 新たな座標系  $\langle O, XY \rangle$  で表された座標は  $A(x\alpha + y\beta, -x\beta + y\alpha)$  である.

$\mathbf{P}$  は, 原点 O を中心とする  $\omega$  回転であったことを思い出そう. このとき

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \cos \omega & -\sin \omega \\ \sin \omega & \cos \omega \end{pmatrix} \text{ であるから } {}^T\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \cos \omega & \sin \omega \\ -\sin \omega & \cos \omega \end{pmatrix},$$

つまり,  $\alpha = \cos \omega$ ,  $\beta = \sin \omega$  である.  $A(x, y)$  について,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \text{ であり, また, 新たな座標系で表したとき}$$

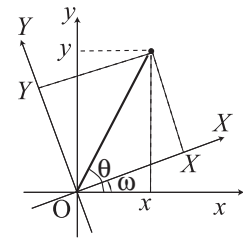
$A(X, Y)$  であるとすれば

$$X = r \cos(\theta - \omega), \quad Y = r \sin(\theta - \omega)$$

であるから, 円関数の加法定理より

$$X = r(\cos \theta \cos \omega + \sin \theta \sin \omega) = x \cos \omega + y \sin \omega = x\alpha + y\beta,$$

$$Y = r(\sin \theta \cos \omega - \cos \theta \sin \omega) = y \cos \omega - x \sin \omega = -x\beta + y\alpha$$



となり，上の結果に一致する．

以上より，次の結果を得る：

**THEOREM 4.13 (回転変換)**

基本 vector  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  を  $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$  に移す回転変換行列を

$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$  とすれば，vector  $x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 = X\mathbf{f}_1 + Y\mathbf{f}_2$  について，

$$X = x\alpha + y\beta, \quad Y = -x\alpha + y\beta.$$

これは，次式で計算される：

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = {}^T\mathbf{P} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

## § 4–6.

## 2 次曲線の標準化

いよいよ，一般の 2 次方程式

$$f(x, y) = ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad (4.1)$$

で表された 2 次曲線の正体を暴くときがきた． $2 \times 2$  正方行列の対角化は，まさにこのためであった，と言っても過言ではない．

2 次方程式 (4.1) を，vector と行列で表す． $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix}$ ， $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} g \\ f \end{pmatrix}$  とし，また  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  と定める．このとき，方程式 (4.1) は

$$f(x, y) = {}^T\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{x} + 2{}^T\mathbf{a}\mathbf{x} + c = 0 \quad (4.2)$$

となる．この方程式 (4.2) は，流通座標系 *current coordinate*  $\langle O, xy \rangle$  で表されている．この座標系に，ある回転座標変換  $\tau^{-1}$  を施す． $\tau^{-1}$  の表現行列を  $\mathbf{P}^{-1}$  とする． $\mathbf{P}$  は直交行列であるから， $\mathbf{P}^{-1} = {}^T\mathbf{P}$  である．この座標変換によって得られる座標系を  $\langle O, XY \rangle$  とし，vector  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  が新たな座標系  $\langle O, XY \rangle$  で  $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$  と表されるとすれば， ${}^T\mathbf{P}\mathbf{x} = \mathbf{x}'$  であるから次が成り立つ：

$$\mathbf{x} = ({}^T\mathbf{P})^{-1}\mathbf{x}' = {}^T({}^T\mathbf{P})\mathbf{x}' = \mathbf{P}\mathbf{x}'.$$

これを (4.2) に代入する：

$$f(x, y) = {}^T(\mathbf{P}\mathbf{x}')\mathbf{A}(\mathbf{P}\mathbf{x}') + 2{}^T\mathbf{a}\mathbf{P}\mathbf{x}' + c = 0. \quad (4.3)$$

一般に，行列  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  に積が定義されているとき，

$${}^T(\mathbf{AB}) = {}^T\mathbf{B}{}^T\mathbf{A}$$

が成り立つから, (Verify it!) (4.3) は次のように書ける :

$$f(x, y) = (\mathbf{x}'^T \mathbf{P}^T \mathbf{P}) \mathbf{A} (\mathbf{P} \mathbf{x}') + 2 \mathbf{a}^T \mathbf{P} \mathbf{x}' + c = 0,$$

つまり

$$f(x, y) = \mathbf{x}'^T (\mathbf{P}^T \mathbf{P} \mathbf{A}) \mathbf{x}' + (2 \mathbf{a}^T \mathbf{P}) \mathbf{x}' + c = 0. \quad (4.4)$$

方程式 (4.4) は vector  $\mathbf{x}'$  についての方程式である.  $\mathbf{x}' = \mathbf{P}^T \mathbf{x}$  であったことを思い出そう.  $\mathbf{x}'$  は  $\langle \mathbf{O}, xy \rangle$  に座標変換  $\mathbf{P}^T$  を施して得られる座標系  $\langle \mathbf{O}, XY \rangle$  で, vector  $\mathbf{x}$  を表したものである.

もし, 対称行列  $\mathbf{A}$  が, 回転変換を表す行列  $\mathbf{P}$  (それは行列式の値が 1 であるような直交行列であった) によって対角化されて,

$$\mathbf{P}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{P} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

と表されたとしよう. このとき (4.4) は

$$\begin{aligned} (X \ Y) \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + 2(g' \ f') \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + c &= 0 \\ \iff \alpha X^2 + \beta Y^2 + 2g'X + 2f'Y + c &= 0 \end{aligned}$$

となる.  $g', f'$  が 0 でないならば, 平方完成をすることによって, この方程式はどのような曲線で, どこに位置するか, 中心, 軸, 漸近線, 焦点と準線などを決定することができる. 更に, この  $\alpha, \beta$  は, 行列  $\mathbf{A}$  の固有値であることに注意せよ.

これが「2 次曲線の標準化」*normalization, standardization* と言われる操作である.

以上から我々は, 結局次の定理を得たことになる :

#### THEOREM 4.14 (2 次曲線の標準化戦略)

一般の 2 次曲線

$$f(x, y) = ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

は, 次の手順によって標準化される :

- (1)  $f(x, y) = 0$  を  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{a}^T \mathbf{x} + c = 0$  と表す.
- (2)  $\mathbf{A}$  を対角化する直交行列  $\mathbf{P}$  で,  $\det \mathbf{P} = 1$  であるものを求める.
- (3) 座標変換  $\mathbf{x} = \mathbf{P} \mathbf{x}'$  を施す.  $\mathbf{P}$  についての条件により, この変換は原点を中心とする回転を表す.

この変換によって, 2 次方程式  $f(x, y) = 0$  は

$$f_1(X, Y) = \alpha X^2 + \beta Y^2 + g'X + f'Y + c = 0$$

に変形される.

- (4) 必要ならば平方完成を行って，2 次曲線の中心，軸などが，座標系  $\langle O, XY \rangle$  で決定される。

変換  $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{x}'$  によってそれらをもとの座標系  $\langle O, xy \rangle$  に戻す。

更に，いくつかの標準化を行うことによって，次の定理を得る：

**THEOREM 4.15 (2 次曲線の分類)**

2 次方程式

$$f(x, y) = ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

が非退化の円錐曲線  $\mathcal{C}$  を表すとき，次が成り立つ：

- (1)  $\det \mathbf{A} < 0 \iff \mathcal{C}$  は双曲線.
- (2)  $\det \mathbf{A} = 0 \iff \mathcal{C}$  は放物線.
- (3)  $\det \mathbf{A} > 0 \iff \mathcal{C}$  は楕円.

---

**MEMORANDUM**

---



Zathematics

M3Ψ Winter, 2013.

*Lecture* 5  
一般2次曲線



リーマン幾何学の創始者, リーマン  
Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-66)

Department of Mathematics

---

無限小において現象をどこまで追跡できるか、その精度に、因果関係についてのわれわれの知識は大きく依存している。過去数世紀にわたって達成された、外部世界のメカニズムに関わる成果は、そのほとんどが、無限小解析の発見と、アルキメデスやガリレオやニュートンによって導入され現代物理学が利用している基本的で簡潔な諸概念の応用、この両者の結合として生まれた理論の正確さのおかげなのである。

リーマン (Georg Friedrich Bernhard Riemann)  
ドイツの数学者。ゲッティンゲン大学で言語学および神学を修めたが、  
余暇に数学をも学び、遂にこれを専攻するようになった。

---

# Lecture 5

## 一般2次曲線

### Theme

|                         |    |
|-------------------------|----|
| 5.1 一般2次曲線 . . . . .    | 49 |
| 5.2 2次曲線と座標変換 . . . . . | 54 |
| 5.3 2次曲線の分類 . . . . .   | 58 |

### § 5-1.

### 一般2次曲線

#### 5.1.1 行列による表現

2次曲線を最も一般的な形で定義することから始めよう.  $x, y$  に関する2次式を  $F(x, y)$  とするとき, 方程式  $F(x, y) = 0$  で表される曲線  $\mathcal{C}$  を **2次曲線 conic curves, curves of 2nd degree** と言う. 計算の都合上,  $F(x, y)$  を

$$F(x, y) = ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c \quad (5.1)$$

と置く. このとき, 方程式  $F(x, y) = 0$  は, 行列  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{pmatrix}$ , また vector  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$

と置くことによって

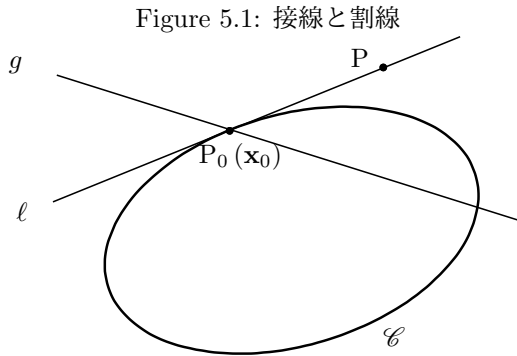
$${}^T\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{x} = (x \ y \ 1) \begin{pmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad (5.2)$$

と表すことができる. 確かめておこう:

$${}^T\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{x} = {}^T \begin{pmatrix} ax + hy + g \\ hx + by + f \\ gx + fy + c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = F(x, y)$$

となる.

この表現を  $\mathcal{C}$  の **3-3 行列表現方程式**, 略して  $M_3$  方程式, と言い,  $\mathbf{A} \in M_3(\mathbb{R})$  を  $\mathcal{C}$  の **3-3 表現行列**, 係数行列と呼ぶ. 3-3 表現行列は対称行列であることに注意しておこう. また, この形に表された  $F(x, y)$  を **2変数2次形式 quadratic form with 2 variables** と言う.



### 5.1.2 接線の行列による表現

$M_3$  方程式 (5.2) で表された一般の 2 次曲線  $\mathcal{C}$  上に、点  $P_0(x_0, y_0)$  があるとする。点  $P_0$  における  $\mathcal{C}$  の接線を、行列により表してみよう。  $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix}$  とする。  $P_0(\mathbf{x}_0)$  を通る任意の直線を  $g$  とし、  $g$  の方向余弦、つまり  $g$  の偏角が  $\theta$  であるとき、  $\begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$  で表される単位 vector、を  $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$  とする。

このとき、  $g$  上の任意の点  $P(\mathbf{x})$ 、ただし  $\mathbf{x} = {}^T(x y 1)$ 、について、  $g$  の vector 方程式は

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{u} \quad (t \in \mathbb{R})$$

であり、実数  $t$  は vector  $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$  の有向の長さを表していることに注意せよ。つまり、実長 parameter である。  $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = t\mathbf{u}$  で、  $|\mathbf{u}| = 1$  であるからである。 ( $\mathbf{u} = {}^T(\lambda \mu 0)$  と考える。)

直線  $g$  と  $\mathcal{C}$  の共有点を与える  $t$  の値は、  $\mathcal{C}$  の方程式 (5.2) に  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}$  を代入してできる  $t$  の方程式

$${}^T(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u})\mathbf{A}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) = 0 \quad (5.3)$$

を解いて得られる。この左辺について  ${}^T(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) = {}^T\mathbf{x}_0 + t{}^T\mathbf{u}$  であるから、

$$\begin{aligned} {}^T(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u})\mathbf{A}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) &= {}^T\mathbf{x}_0\mathbf{A}\mathbf{x}_0 + {}^T\mathbf{x}_0\mathbf{A}(t\mathbf{u}) + {}^T(t\mathbf{u})\mathbf{A}\mathbf{x}_0 + {}^T(t\mathbf{u})\mathbf{A}(t\mathbf{u}) \\ &= ({}^T\mathbf{u}\mathbf{A}\mathbf{u})t^2 + ({}^T\mathbf{x}_0\mathbf{A}\mathbf{u} + {}^T\mathbf{u}\mathbf{A}\mathbf{x}_0)t + {}^T\mathbf{x}_0\mathbf{A}\mathbf{x}_0 \end{aligned}$$

が成り立つ。更に、  $t$  の 1 次の係数について、  $\mathbf{A}\mathbf{u}$  が 3 次の列 vector、つまり (3-1) 行列であること、及び  $\mathbf{A}$  が対称行列であること、に着目すれば、

$${}^T\mathbf{x}_0\mathbf{A}\mathbf{u} = {}^T\mathbf{x}_0(\mathbf{A}\mathbf{u}) = {}^T(\mathbf{A}\mathbf{u})\mathbf{x}_0 = {}^T\mathbf{u}{}^T\mathbf{A}\mathbf{x}_0 = {}^T\mathbf{u}\mathbf{A}\mathbf{x}_0$$

である。従って方程式 (5.3) は結局

$$({}^T\mathbf{u}\mathbf{A}\mathbf{u})t^2 + 2({}^T\mathbf{u}\mathbf{A}\mathbf{x}_0)t + {}^T\mathbf{x}_0\mathbf{A}\mathbf{x}_0 = 0 \quad (5.4)$$

という形になる。

ここで、点  $P(\mathbf{x}_0)$  は、曲線  $\mathcal{C}: {}^T\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$  上の点であったことを思い出せば、方程式 (5.4) の左辺第 3 項は 0 となり、得られる方程式は

$$({}^T\mathbf{u}\mathbf{A}\mathbf{u})t^2 + 2({}^T\mathbf{u}\mathbf{A}\mathbf{x}_0)t = 0 \quad (5.5)$$

である。特に直線  $g$  が  $\mathcal{C}$  の接線  $\ell$  に一致するとき、2 次方程式 (5.5) は重根  $t = 0$  をもつ。これは  ${}^T\mathbf{u}\mathbf{A}\mathbf{x}_0 = 0$  のときである。

以上より、次が言えた：

**THEOREM 5.1 (接線)**

曲線  $\mathcal{C}: {}^T\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$  上の点  $P_0(\mathbf{x}_0)$  を通る直線  $g$  が  $\mathcal{C}$  の接線となるための必要十分条件は、

$${}^T\mathbf{u}\mathbf{A}\mathbf{x}_0 = 0$$

である。ここで、 ${}^T\mathbf{u} = (\lambda \mu 0)$  は  $g$  の方向余弦を表す。

接線上に任意の点  $P(\mathbf{x})$  をとる。このとき  $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = t\mathbf{u}$  である。両辺を転置して  ${}^T(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = {}^T\mathbf{x} - {}^T\mathbf{x}_0 = t{}^T\mathbf{u}$  となり、上の定理 Theorem 5.1 で得た式の両辺を  $t$  倍して、これを代入すれば、 $P_0(\mathbf{x}_0)$  は  $\mathcal{C}$  上の点であることから

$$0 = ({}^T\mathbf{x} - {}^T\mathbf{x}_0)\mathbf{A}\mathbf{x}_0 = {}^T\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{x}_0 - {}^T\mathbf{x}_0\mathbf{A}\mathbf{x}_0 = {}^T\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{x}_0.$$

これが、 $\mathcal{C}$  上の点  $P_0(\mathbf{x}_0)$  における接線の vector 方程式である。多項式に書き直せば、次の定理を得る：

**THEOREM 5.2 (接線の方程式)**

2 次曲線  $\mathcal{C}: {}^T\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$  上の点  $P_0(\mathbf{x}_0)$  における  $\mathcal{C}$  の接線は

$${}^T\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{x}_0 = 0$$

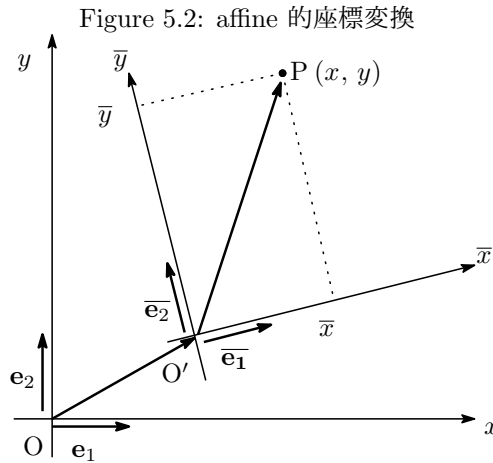
である。 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$  とすれば、これは

$$ax_0x + h(x_0y + xy_0) + by_0y + g(x + x_0) + f(y + y_0) + c = 0$$

である。

### 5.1.3 $M_3(\mathbb{R})$ による座標変換の表現

平面  $\mathbb{R}^2$  上の等長性を保つ線形変換とは、原点を動かすことのない、原点を中心にした回転、および原点を通る直線に関する鏡映であった。それは  $M_2(\mathbb{R})$  の要素を表現行列として持って



いた.

一般に, ある座標系  $[O; x, y]$  が定義されている座標平面  $\mathbb{R}^2$  で, 別の座標系  $[O'; \bar{x}, \bar{y}]$  を考えて, 一方の座標系から他方の座標系へ移ることを座標変換 *coordinate transformation* という.

以下では, 回転と鏡映以外に, 平行移動 (ズラシ, translation) をも含めた座標変換を考えよう. そのような変換をアフィン等長変換 *affine isometric transformation* という. 線形変換  $\mathcal{L}$  によって  $P(x, y)$  が  $Q(\bar{x}, \bar{y})$  に移るとすると,  $\bar{x}, \bar{y}$  はそれぞれ  $x, y$  の斉次 1 次式で表された. それこそが, 線形変換  $\mathcal{L}$  が表現行列  $\mathbf{A} \in M_2(\mathbb{R})$  をもつことの意味であった:

$$\mathcal{L} : \begin{cases} \bar{x} = ax + by, \\ \bar{y} = cx + dy \end{cases} \iff \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

この線形変換のもつ条件, つまり『斉次 1 次式で表される』という条件を弱め,

$\bar{x}, \bar{y}$  がそれぞれ  $x, y$  の 1 次式で表される

とするとき, 何が得られるか, つまり

$$\mathcal{A} : \begin{cases} \bar{x} = ax + by + x_0, \\ \bar{y} = cx + dy + y_0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

で表されるような変換を考え, それを用いて定義される座標変換を考えよう, というわけである.

旧座標系  $[O; x, y]$  の基本 vector を  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  とし, 旧座標で座標  $(x, y)$  をもつ点  $P$  が与えられたとしよう.

新座標系の原点  $O'$  が旧座標系で  $O'(x_0, y_0)$  であり, 新座標系  $[O'; \bar{x}, \bar{y}]$  の基本 vector が  $\mathbf{e}_1$ ,

$\mathbf{e}_2$  であるとする。この新座標系  $[O'; \bar{x}, \bar{y}]$  で、点 P が  $(\bar{x}, \bar{y})$  と表されたとすれば、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P} \\ &= \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \bar{x} \mathbf{e}_1 + \bar{y} \mathbf{e}_2 \\ &= \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \bar{x} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} + \bar{y} \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \\ \therefore \begin{cases} x = \bar{x} \cos \theta - \bar{y} \sin \theta + x_0, \\ y = \bar{x} \sin \theta + \bar{y} \cos \theta + y_0 \end{cases}\end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、 $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} \cos(\theta + \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\theta + \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$  は、新座標系の基本 vector を、旧座標系で表した表現である。

これを行列を用いて表してみよう。

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}, \bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{P} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & x_0 \\ \sin \theta & \cos \theta & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とすれば、この座標変換により

$$\mathbf{x} = \mathbf{P}\bar{\mathbf{x}} \quad (5.6)$$

という関係が成り立つ。これは、旧座標系での座標を新座標系で表した式であり、その表現行列は、新座標系の基底 vector を、旧座標系で表現したものであることに注意してほしい。

このようにして得られた回転と平行移動に関する座標変換について、次が成り立つ：

### THEOREM 5.3

式 (5.6) により表される座標変換の下で、

- 2 点間の距離を与える式  $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ ,
- 2 つの vector  $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$  の内積を与える式  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$

は不変である。

*Proof.*

- i) 2 点  $P_1, P_2$  の新座標系での表現が、それぞれ  $(\bar{x}_1, \bar{y}_1), (\bar{x}_2, \bar{y}_2)$  であるとすれば、式 (5.6) によって

$$\begin{aligned}x_1 &= \bar{x}_1 \cos \theta - \bar{y}_1 \sin \theta + x_0, & y_1 &= \bar{x}_1 \sin \theta + \bar{y}_1 \cos \theta + y_0, \\ x_2 &= \bar{x}_2 \cos \theta - \bar{y}_2 \sin \theta + x_0, & y_2 &= \bar{x}_2 \sin \theta + \bar{y}_2 \cos \theta + y_0\end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned}x_2 - x_1 &= (\bar{x}_2 - \bar{x}_1) \cos \theta - (\bar{y}_2 - \bar{y}_1) \sin \theta, \\y_2 - y_1 &= (\bar{x}_2 - \bar{x}_1) \sin \theta + (\bar{y}_2 - \bar{y}_1) \cos \theta. \\ \therefore (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 &= (\bar{x}_2 - \bar{x}_1)^2 + (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)^2.\end{aligned}$$

よって距離  $d$  を与える式はこの座標変換のもとで不変である.

- ii)  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  の長さは不変だから,  $|\mathbf{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2$ ,  $|\mathbf{b}|^2 = b_1^2 + b_2^2$  は不変.  
 $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  より,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{2} \{ |\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2 \}$$

は不変.

■

## § 5-2.

## 2 次曲線と座標変換

### 5.2.1 対称行列の性質

2 次曲線  $\mathcal{C} : F(x, y) = ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$  の  $M_3$  方程式を

$${}^T\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$$

とする.  $\mathbf{A} \in M_3(\mathbb{R})$  から, その第 3 行, 第 3 列を取り除いてできる行列 (それは  $M_2(\mathbb{R})$  の要素である) を  $\mathbf{A}_*$  で表す:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{pmatrix} \text{ ならば } \mathbf{A}_* = \begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix}$$

である. また, vector についても同様にして

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ならば } \mathbf{x}_* = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

とし, それぞれ, 行列  $\mathbf{A}$ , vector  $\mathbf{x}$  の縮小 *truncation* と呼ぶことにしよう.  $\mathbf{A}_*$ ,  $\mathbf{x}_*$  によって  $\mathcal{C}$  を表せば

$$\mathcal{C} : {}^T\mathbf{x}_*\mathbf{A}_*\mathbf{x}_* + 2(g \ f)\mathbf{x}_* + c = 0$$

である. これは, 2 次曲線  $\mathcal{C}$  の  $M_2$  方程式である.

話を  $M_3$  方程式に戻す.  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$  について, 2 次曲線  $\mathcal{C}$  は

$$\mathcal{C} : F(x, y) = {}^T\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$$

であった. この曲線  $\mathcal{C}$  が, 表現行列  $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & x_0 \\ \sin \theta & \cos \theta & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  をもつような,  $[O; x, y]$  から  $[O'; \bar{x}, \bar{y}]$  への座標変換  $\mathbf{x} = \mathbf{P}\bar{\mathbf{x}}$  によって

$$\mathcal{C} : F = {}^T\bar{\mathbf{x}}\mathbf{A}'\bar{\mathbf{x}} = 0 \quad (5.7)$$

になったとする. ここで

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} a' & h' & g' \\ h' & b' & f' \\ g' & f' & c' \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{x}$ ,  $\bar{\mathbf{x}}$  の間には  $\mathbf{x} = \mathbf{P}\bar{\mathbf{x}}$  が成り立つから,  ${}^T\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$  に代入して

$${}^T(\mathbf{P}\bar{\mathbf{x}})\mathbf{A}(\mathbf{P}\bar{\mathbf{x}}) = {}^T\bar{\mathbf{x}}({}^T\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P})\bar{\mathbf{x}} = 0. \quad (5.8)$$

2 式 (5.7), (5.8) は, 新座標系  $[O'; \bar{x}, \bar{y}]$  で同じ曲線  $\mathcal{C}$  を表している. つまり式

$${}^T\bar{\mathbf{x}}\mathbf{A}'\bar{\mathbf{x}} = {}^T\bar{\mathbf{x}}({}^T\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P})\bar{\mathbf{x}}$$

は,  $\bar{\mathbf{x}}$  に関する恒等式である. このことから,  $\mathbf{A}' = {}^T\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}$  が直ちには言えないところが, 行列の怖いところである. 例えば,  $M_2(\mathbb{R})$  で例を挙げれば

$$(x \ y) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = xy, \quad (x \ y) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = xy \text{ は常に成立するが } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

しかし,  $\mathbf{A}'$  が対称行列であることによって, 実は  $\mathbf{A}' = {}^T\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}$  が言えるのである. 詳しくは, 次の Lemma による:

**Lemma 5.4** (対称行列と恒等式)

$\mathbf{A} \in M_3(\mathbb{R})$  が対称行列, また  $\mathbf{x} = {}^T(x \ y \ z) \in \mathbb{R}^3$  とする. このとき,

$$\forall x, y, z : {}^T\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{x} = 0 \iff \mathbf{A} = \mathbf{O}.$$

従って,  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_3(\mathbb{R})$  が対称行列ならば,

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : {}^T\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{x} \equiv {}^T\mathbf{x}\mathbf{B}\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{B}.$$

ただし, 多項式  $f, g$  について  $f \equiv g$  とは,  $f = g$  が恒等式であることを表す. □

*Proof.* 対称行列  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{pmatrix}$ , また vector  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  について

$${}^T\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{x} = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy$$

となる. これが恒等的に 0 であるから,  $a = b = c = f = g = h = 0$ . つまり  $\mathbf{A} = \mathbf{O}$ .

${}^T\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{x} = {}^T\mathbf{x}\mathbf{B}\mathbf{x}$  が恒等的に成り立つならば,  ${}^T\mathbf{x}(\mathbf{A} - \mathbf{B})\mathbf{x} = 0$  が恒等式だから  $\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{O}$  となり, 従って  $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ . ■

### 5.2.2 座標変換による作用

この Lemma 5.4 により, 次の Theorem 5.5 を得る:

**THEOREM 5.5 (座標変換による係数行列)**

2 次曲線  $\mathcal{C}$  が旧座標系  $[O; x, y]$  で  $M_3$  方程式  ${}^T\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$  をもつとする. 新座標系  $[O'; \bar{x}, \bar{y}]$  への座標変換が表現行列

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & x_0 \\ \sin \theta & \cos \theta & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

をもつとき, 新座標系  $[O'; \bar{x}, \bar{y}]$  における  $\mathcal{C}$  の  $M_3$  方程式が  ${}^T\bar{\mathbf{x}}\mathbf{A}'\bar{\mathbf{x}} = 0$  であるならば

$$\mathbf{A}' = {}^T\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}$$

が成り立つ.

実際に  $\mathbf{A}'$  の成分を求めてみよう.  $\mathbf{A}' = {}^T\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}$  であるから,  $\cos \theta = \lambda$ ,  $\sin \theta = \mu$  として書き直すと

$$\begin{pmatrix} a' & h' & g' \\ h' & b' & f' \\ g' & f' & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \mu & 0 \\ -\mu & \lambda & 0 \\ x_0 & y_0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & -\mu & x_0 \\ \mu & \lambda & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

である.  $\mathbf{A}'$  の  $M_2(\mathbb{R})$  への縮小  $\mathbf{A}'_* = ({}^T\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P})_*$  は  ${}^T\mathbf{P}_*\mathbf{A}_*\mathbf{P}_*$  に等しいから (確かめよ),

$$\begin{pmatrix} a' & h' \\ h' & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ -\mu & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix}. \quad (5.10)$$

式 (5.10) の右辺は

$$\begin{pmatrix} \lambda a + \mu h & \lambda h + \mu b \\ -\mu a + \lambda h & -\mu h + \lambda b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix}$$

であるから、次が成り立つ：

$$\begin{cases} a' = \lambda^2 a + 2\lambda\mu h + \mu^2 b, \\ b' = \mu^2 a - 2\lambda\mu h + \lambda^2 b, \\ h' = (\lambda^2 - \mu^2) h - (a - b)\lambda\mu. \end{cases} \quad (5.11)$$

(5.11) を、 $\lambda = \cos \theta$ ,  $\mu = \sin \theta$  によって書き直せば、次の (5.12) になる：

$$\begin{cases} a' = a \cos^2 \theta + 2h \cos \theta \sin \theta + b \sin^2 \theta, \\ b' = a \sin^2 \theta - 2h \cos \theta \sin \theta + b \cos^2 \theta, \\ 2h' = 2h (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - (a - b)2 \cos \theta \sin \theta = 2h \cos 2\theta - (a - b) \sin 2\theta. \end{cases} \quad (5.12)$$

式 (5.12) は、座標変換の表現行列  $\mathbf{P}$  の  $x_0, y_0$  の値に依存しないから、特に  $x_0 = y_0 = 0$  と考えてよい。従って、旧座標系  $[O; x, y]$  を  $\theta$  だけ回転させた新座標系  $[O'; \bar{x}, \bar{y}]$  で  $\mathcal{C} : F(x, y) = 0$  を表すとき、2 次係数  $a', b', 2h'$  は式 (5.12) で与えられることを意味する。これも定理としておこう：

**THEOREM 5.6 (変換と 2 次係数)**

2 次曲線  $\mathcal{C}$  が旧座標系  $[O; x, y]$  で  $M_3$  方程式  ${}^T \mathbf{x} \mathbf{A} \mathbf{x} = 0$  をもつとき、 $[O; x, y]$  を角  $\theta$  だけ回転させた新座標系  $[O'; \bar{x}, \bar{y}]$  での  $\mathcal{C}$  の方程式は、2 次の係数に式 (5.12) をもつ。

キチツとした言い方ではないが、式 (5.12) での  $h'$  の値が 0 になれば、新座標系  $[O'; \bar{x}, \bar{y}]$  での  $\mathcal{C}$  の方程式は

$${}^T \bar{\mathbf{x}} \mathbf{A}' \bar{\mathbf{x}} = a' \bar{x}^2 + b' \bar{y}^2 + 2g' \bar{x} + 2f' \bar{y} + c' = 0$$

となり、それがどのような曲線であるか、が判断できることになる。

更に、Theorem 5.5 によって、次の定理 5.7 を得る：

**THEOREM 5.7 (2 次曲線の不変量)**

2 次曲線  $\mathcal{C} : F(x, y) = {}^T \mathbf{x} \mathbf{A} \mathbf{x} = 0$  の係数で作られた量

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}, \quad \det \mathbf{A}_* = \begin{vmatrix} a & h \\ h & b \end{vmatrix}, \quad \text{tr} \mathbf{A}_* = a + b \quad (5.13)$$

は、 $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & x_0 \\ \sin \theta & \cos \theta & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  を表現行列とする座標変換により不変である。これらを

2 次曲線の不変量 *invariants of conics* と言う。

*Proof.*  $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \lambda & -\mu & x_0 \\ \mu & \lambda & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{P}_* = \begin{pmatrix} \lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix}$  について,  $\det \mathbf{P} = 1$ ,  $\det \mathbf{P}_* = 1$

である. 行列式の分解性から,

$$\det({}^T\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}) = \det{}^T\mathbf{P} \cdot \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{P} = \det \mathbf{A}, \quad \det({}^T\mathbf{P}_*\mathbf{A}_*\mathbf{P}_*) = \det \mathbf{A}_*.$$

よって  $\det \mathbf{A}' = \det \mathbf{A}$ ,  $\det \mathbf{A}'_* = \det \mathbf{A}_*$  が言えた.

また,

$$\mathrm{tr} \mathbf{A}'_* = a(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + b(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = a + b = \mathrm{tr} \mathbf{A}_*.$$

■

## § 5-3.

## 2 次曲線の分類

### 5.3.1 2 次曲線の中心

2 次曲線の中心を改めて定義することから始めよう. それにより, 有心 2 次曲線と無心 2 次曲線の区別が可能になる.

#### Definition 5.8 (2 次曲線の中心)

2 次曲線  $\mathcal{C}$  と点  $K(x_0, y_0)$  について, 次のように定義する:  $K$  を通る任意の直線  $\ell$  と  $\mathcal{C}$  との交点を  $P_1, P_2$  とする. 線分  $P_1P_2$  の中点  $M$  が点  $K$  に一致するとき, この点  $K$  を  $\mathcal{C}$  の中心 *center* と言う.

$\mathcal{C}$  が中心をもつとき,  $\mathcal{C}$  を有心 2 次曲線 *central conic* と言い, 中心をもたないとき, 無心 2 次曲線 *noncentral conic* と言う.

$\mathcal{C}$  が中心  $K$  をもつとする.  $K(\mathbf{x}_0)$ ,  $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ 0 \end{pmatrix}$  と定める. ただし  $\lambda^2 + \mu^2 = 1$  とする. このとき,  $K$  を通り, 方向 vector  $\mathbf{u}$  をもつ直線  $\ell$  は

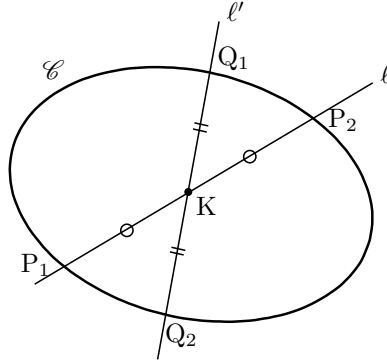
$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{u} \quad (t \in \mathbb{R})$$

と表される. これを  $\mathcal{C}$  の方程式に代入すれば

$${}^T(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) \mathbf{A} (\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) = 0 \tag{5.14}$$

となる.

Figure 5.3: 中心



式 (5.14) を  $t$  に関する方程式と考えれば、その解は、 $\mathcal{C}$  と直線  $\ell$  との交点を与えるような、parameter  $t$  の値である。つまり、方程式 (5.14) の解を  $t_1, t_2$  とし、 $\ell$  上の点を  $P(t)$  で表せば、 $P_1(t_1), P_2(t_2)$  である。

(5.14) を展開して

$$\begin{aligned} & {}^T\mathbf{x}_0\mathbf{A}\mathbf{x}_0 + {}^T\mathbf{x}_0\mathbf{A}(t\mathbf{u}) + {}^T(t\mathbf{u})\mathbf{A}\mathbf{x}_0 + {}^T(t\mathbf{u})\mathbf{A}(t\mathbf{u}) = 0 \\ \iff & ({}^T\mathbf{u}\mathbf{A}\mathbf{u})t^2 + ({}^T\mathbf{x}_0\mathbf{A}\mathbf{u} + {}^T\mathbf{u}\mathbf{A}\mathbf{x}_0)t + {}^T\mathbf{x}_0\mathbf{A}\mathbf{x}_0 = 0 \end{aligned} \quad (5.15)$$

ここで、 $\mathbf{A}$  は対称行列だから

$${}^T\mathbf{x}_0\mathbf{A}\mathbf{u} = {}^T\mathbf{x}_0(\mathbf{A}\mathbf{u}) = {}^T(\mathbf{A}\mathbf{u})\mathbf{x}_0 = ({}^T\mathbf{u}^T\mathbf{A})\mathbf{x}_0 = {}^T\mathbf{u}\mathbf{A}\mathbf{x}_0$$

が成り立つから、結局方程式 (5.15) は次の (5.16) になる：

$$({}^T\mathbf{u}\mathbf{A}\mathbf{u})t^2 + 2({}^T\mathbf{u}\mathbf{A}\mathbf{x}_0)t + {}^T\mathbf{x}_0\mathbf{A}\mathbf{x}_0 = 0. \quad (5.16)$$

$\mathbf{u} = {}^T(\lambda\mu 0)$  について、 $\lambda^2 + \mu^2 = 1$  であるから、 $t$  は実長、正しくは実際の有向距離、を表す parameter である。従って、 $P_1(t_1), P_2(t_2)$  となる  $t_1, t_2$  について、

$$t_1 + t_2 = 0$$

が成り立つ。方程式 (5.16) について、解と係数の関係より 1 次の係数は

$${}^T\mathbf{u}\mathbf{A}\mathbf{x}_0 = 0$$

である。これを成分で表せば

$$\begin{aligned} & (\lambda\mu 0) \begin{pmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \\ \iff & (a\lambda + h\mu)x_0 + (h\lambda + b\mu)y_0 + g\lambda + f\mu = 0 \\ \iff & \lambda(ax_0 + hy_0 + g) + \mu(hx_0 + by_0 + f) = 0 \end{aligned} \quad (5.17)$$

となる.

$\lambda, \mu$  が  $\lambda^2 + \mu^2 = 1$  をみたしながら動くとき, つまり  $\lambda = \cos \theta, \mu = \sin \theta$  で  $\theta$  が実数  $\mathbb{R}$  上を自由に動くとき, 式 (5.17) が常に成り立つから

$$ax_0 + hy_0 + g = 0, \quad hx_0 + by_0 + f = 0$$

である. つまり, 中心  $K(x_0, y_0)$  について,  $x_0, y_0$  は連立方程式

$$\begin{cases} ax + hy + g = 0, \\ hx + by + f = 0 \end{cases} \quad (5.18)$$

の解である.

中心  $K(x_0, y_0)$  が存在するならば, 連立方程式 (5.18) が一意解をもつから, 中心線束が存在する.  $\mathbf{A}_* = \begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix}$  について  $\det \mathbf{A}_* \neq 0$  であり, また, 中心が存在しないときは, この方程式が解をもたないか, または任意解をもつから,  $\det \mathbf{A}_* = 0$  である.

以上から,  $\mathcal{C}: F(x, y) = {}^t\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$  が有心 2 次曲線か, それとも無心 2 次曲線かは, 次の Theorem 5.9 の示すように, 縮小係数行列  $\mathbf{A}_*$  の行列式を用いて判定可能である:

**THEOREM 5.9 (有心か無心かの判定)**

2 次曲線  $\mathcal{C}: F(x, y) = 0$  の  $M_3$  方程式を  ${}^t\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$  とする. このとき, 次が成り立つ:

- $\mathcal{C}$  が有心である  $\iff \det \mathbf{A}_* \neq 0$ .
- $\mathcal{C}$  が無心である  $\iff \det \mathbf{A}_* = 0$ .

ここで, Theorem 5.7 (p. 57) を思い出そう.  $\det \mathbf{A}_*$  は座標変換における 2 次曲線の不変量であった. 従って, 一般の 2 次曲線  $\mathcal{C}$  が与えられたとき, それを標準形に直さなくても,  $\det \mathbf{A}_*$  の値を求めれば, その与えられた 2 次曲線が有心か無心かは, この Theorem 5.9 により判定できることが判る.

### 5.3.2 有心曲線の中心の原点化

2 次曲線  $\mathcal{C}: F(x, y) = {}^t\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$  で, 縮小係数行列  $\mathbf{A}_* = \begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix}$  について  $\det \mathbf{A}_* \neq 0$  の場合を考えよう. 与えられた 2 次曲線が有心である場合に, それがどのような曲線か, 楕円か双曲線か, それとも退化してしまっているのか, という判定を行う定理を得たい訳である. 残念ながら天下り風になることを許してほしい.

**THEOREM 5.10 (中心の原点化)**

$\mathcal{C}: F(x, y) = {}^t\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$  が中心  $K(x_0, y_0)$  をもつとする.  $K$  を原点に移す座標変換に

よって,  $[O; x, y]$  から  $[K; \bar{x}, \bar{y}]$  に移れば, 新座標系  $[K; \bar{x}, \bar{y}]$  で  $\mathcal{C}$  は

$$\mathcal{C} : F = a\bar{x}^2 + 2h\bar{x}\bar{y} + b\bar{y}^2 + \frac{\delta}{\delta_*} = 0 \quad (5.19)$$

で表される. ここで  $\delta = \det \mathbf{A}$ ,  $\delta_* = \det \mathbf{A}_*$  とする. また,

$$F(x_0, y_0) = \frac{\delta}{\delta_*} \quad (5.20)$$

が成り立つ.

*Proof.*

$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix}$  とすれば  $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{x}_0$ . これを  $\mathcal{C} : {}^T\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$  に代入すれば

$$0 = {}^T(\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{x}_0)\mathbf{A}(\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{x}_0) = {}^T\bar{\mathbf{x}}\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} + {}^T\bar{\mathbf{x}}\mathbf{A}\mathbf{x}_0 + {}^T\mathbf{x}_0\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} + {}^T\mathbf{x}_0\mathbf{A}\mathbf{x}_0.$$

$\mathbf{A}$  が対称行列であることと, 転置の性質から次の方程式になる:

$${}^T\bar{\mathbf{x}}\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} + 2{}^T\mathbf{x}_0\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} + {}^T\mathbf{x}_0\mathbf{A}\mathbf{x}_0 = 0. \quad (5.21)$$

この式 (5.21) の第 2 項について

$${}^T\mathbf{x}_0\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} = (x_0 \ y_0 \ 0) \begin{pmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ 1 \end{pmatrix} = {}^T \begin{pmatrix} ax_0 + hy_0 \\ hx_0 + by_0 \\ gx_0 + fy_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.22)$$

ここで  $x_0, y_0$  は連立方程式  $\begin{cases} ax + hy + g = 0 \\ hx + by + f = 0 \end{cases}$  の解だから,  $\begin{cases} ax_0 + hy_0 = -g \\ hx_0 + by_0 = -f \end{cases}$  が成り立ち, (5.22) は

$${}^T\mathbf{x}_0\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} = {}^T \begin{pmatrix} -g \\ -f \\ gx_0 + fy_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ 1 \end{pmatrix} = -g\bar{x} - f\bar{y} + gx_0 + fy_0. \quad (5.23)$$

また (5.21) の第 3 項について

$${}^T\mathbf{x}_0\mathbf{A}\mathbf{x}_0 = (x_0 \ y_0 \ 0) \begin{pmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix} = ax_0^2 + 2hx_0y_0 + by_0^2. \quad (5.24)$$

よって (5.23), (5.24) によって, 結局 (5.21) は

$$\begin{aligned} a\bar{x}^2 + 2h\bar{x}\bar{y} + b\bar{y}^2 + c + 2gx_0 + 2fy_0 + ax_0^2 + 2hx_0y_0 + by_0^2 &= 0, \\ \therefore a\bar{x}^2 + 2h\bar{x}\bar{y} + b\bar{y}^2 + F(x_0, y_0) &= 0, \\ \text{または } {}^T\bar{\mathbf{x}}_* \mathbf{A}_* \bar{\mathbf{x}}_* + F(x_0, y_0) &= 0. \end{aligned} \quad (5.25)$$

ここで,  $F(x_0, y_0)$  について, 次のような変形を考える:

$$\begin{aligned} F(x_0, y_0) &= ax_0^2 + 2hx_0y_0 + by_0^2 + 2gx_0 + 2fy_0 + c \\ &= x_0(ax_0 + hy_0 + g) + y_0(hx_0 + by_0 + f) + gx_0 + fy_0 + c \\ &= gx_0 + fy_0 + c. \end{aligned} \quad (5.26)$$

さて, 連立方程式  $\begin{cases} ax + hy = -g \\ hx + by = -f \end{cases}$  の一意解が  $(x, y) = (x_0, y_0)$  であるから, Cramer's formula によって

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} -g & h \\ -f & b \end{vmatrix}}{\delta_*}, \quad y_0 = \frac{\begin{vmatrix} a & -g \\ h & -f \end{vmatrix}}{\delta_*} \quad \therefore \begin{vmatrix} -g & h \\ -f & b \end{vmatrix} = \delta_* x_0, \quad \begin{vmatrix} a & -g \\ h & -f \end{vmatrix} = \delta_* y_0. \quad (5.27)$$

最後に, 係数行列  $\mathbf{A}$  の行列式  $\delta$  を第 3 行について展開すれば,

$$\begin{aligned} \delta &= g \begin{vmatrix} h & g \\ b & f \end{vmatrix} + f \begin{vmatrix} g & a \\ f & h \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} a & h \\ h & b \end{vmatrix} \\ &= g \cdot \delta_* x_0 + f \cdot \delta_* y_0 + c \delta_* \end{aligned} \quad \therefore (5.27)$$

$$= \delta_* (gx_0 + fy_0 + c) = \delta_* \cdot F(x_0, y_0). \quad \therefore (5.26)$$

$$\therefore F(x_0, y_0) = \frac{\delta}{\delta_*}. \quad (5.28)$$

以上から,  $\mathcal{C}$  は, その中心に原点をもつ新座標系  $[O'; \bar{x}, \bar{y}]$  において

$$a\bar{x}^2 + 2h\bar{x}\bar{y} + b\bar{y}^2 + \frac{\delta}{\delta_*} = 0 \quad (5.29)$$

で表されることが示された. ■

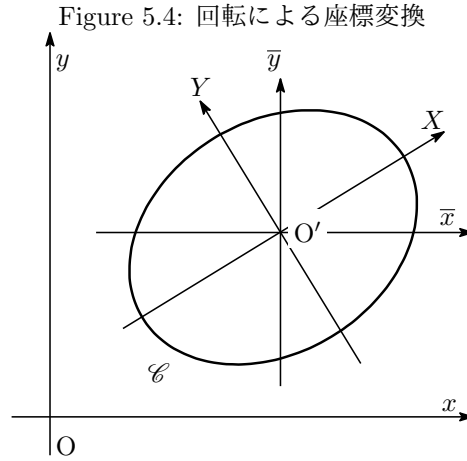
### 5.3.3 有心 2 次曲線の標準形

以上で, 有心 2 次曲線の中心を原点にもつ座標系  $[O'; \bar{x}, \bar{y}]$  を作ることができた. その座標系では, 旧座標系  $[O; x, y]$  で与えられた 2 次曲線  $\mathcal{C}: {}^T\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$  は, 式

$$(5.19) \quad \mathcal{C}: a\bar{x}^2 + 2h\bar{x}\bar{y} + b\bar{y}^2 = k$$

となった. ここで,  $k = -\frac{\delta}{\delta_*}$ ,  $\delta = \det \mathbf{A}$ ,  $\delta_* = \det \mathbf{A}_*$  であった.

座標系  $[O'; \bar{x}, \bar{y}]$  を,  $O'$  を中心として, 角  $\theta$  だけ回転してできる新たな座標系を  $[O'; X, Y]$  とする. このとき, 次の定理が成り立つ:


**THEOREM 5.11** (有心 2 次曲線の標準化)

$\mathcal{C} : {}^t\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$  が  $[O'; \bar{x}, \bar{y}]$  で

$${}^t\bar{\mathbf{x}}_*\mathbf{A}_*\bar{\mathbf{x}}_* = k, \text{ つまり } a\bar{x}^2 + 2h\bar{x}\bar{y} + b\bar{y}^2 = k$$

と表されたとする。ここで、 $k = -\frac{\delta}{\delta_*}$ ,  $\delta = \det \mathbf{A}$ ,  $\delta_* = \det \mathbf{A}_*$  であり、また、 $\text{tr} \mathbf{A}_* = \tau_*$  とする。

座標系  $[O'; \bar{x}, \bar{y}]$  を、次の式 (5.31) をみたす角  $\theta$  だけ、 $O'$  を中心にして回転させて得られる座標系を  $[O'; X, Y]$  で表せば、2 次曲線  $\mathcal{C}$  は

$$\mathcal{C} : \alpha X^2 + \beta Y^2 = k \quad (5.30)$$

となる。ここで、 $\theta, \alpha, \beta$  は次をみたすものとする：

- 座標系の回転角  $\theta$  について

$$\tan 2\theta = \frac{2h}{a-b} \quad \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right). \quad (5.31)$$

- $\alpha, \beta$  は、 $\mathbf{A}_*$  の固有方程式

$$\phi_{\mathbf{A}_*}(\lambda) = \lambda^2 - \tau_*\lambda + \delta_* = 0 \quad (5.32)$$

の 2 根であり、 $h > 0$  ならば  $\alpha$  は大きい方の、 $h < 0$  ならば  $\alpha$  は小さい方の、根である。

いくつかの段階に分けて証明する。

*Proof.*

I) 原点  $O'$  を中心とする  $\theta$  だけの回転により得られる座標系  $[O'; X, Y]$  において,  $\mathcal{C}$  が

$$\alpha X^2 + 2\eta XY + \beta Y^2 = k \iff {}^T \hat{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{A}} \hat{\mathbf{x}} = k$$

になったとする. ここで,  $\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ ,  $\hat{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \alpha & \eta \\ \eta & \beta \end{pmatrix}$ . このとき, (5.12)(p.57) で既に表示したように

$$\begin{aligned} \alpha &= a \cos^2 \theta + 2h \sin \theta \cos \theta + b \sin^2 \theta, \\ \beta &= a \sin^2 \theta - 2h \sin \theta \cos \theta + b \cos^2 \theta, \\ 2\eta &= 2h \cos 2\theta - (a - b) \sin 2\theta \end{aligned} \quad (5.33)$$

が成り立つ. この第3式を  $\cos 2\theta$  でわれば, 条件 (5.31) より,

$$\frac{2\eta}{\cos 2\theta} = 2h - (a - b) \tan 2\theta = 2h - 2h = 0 \quad \therefore \eta = 0.$$

従って,  $\theta$  を定理の言うように定めれば,  $XY$  の係数  $\eta$  は 0 となり, 係数行列は  $\hat{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$  となる.

II) また, Theorem 5.7(p.57) で示したように, 縮小行列の trace, determinant は 2 次曲線の不変量であるから,

$$\delta_* = \det \mathbf{A}_* = \det \hat{\mathbf{A}}, \quad \tau_* = \text{tr} \mathbf{A}_* = \text{tr} \hat{\mathbf{A}}$$

である. よって

$$\alpha\beta = ab - h^2, \quad \alpha + \beta = a + b$$

が成り立つ. 従って  $\alpha, \beta$  は 2 次方程式

$$\lambda^2 - (a + b)\lambda + ab - h^2 = 0 \iff \lambda^2 - \tau_*\lambda + \delta_* = 0$$

を解くことによって得られる. つまり,  $\alpha, \beta$  は, 縮小行列  $\mathbf{A}_*$  の固有値に他ならない. これで, 定理の言う (5.32) が示された.

III) 更に, (5.33) より

$$\begin{aligned} \alpha - \beta &= a \cos 2\theta - b \cos 2\theta + 2h \cdot 2 \sin \theta \cos \theta \\ &= (a - b) \cos 2\theta + 2h \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (5.34)$$

であるが, この式 (5.34) の両辺に  $2h$  をかければ

$$2h(\alpha - \beta) = 4h^2 \sin 2\theta + 2h(a - b) \cos 2\theta$$

である。ところが $\eta = 0$ であるから、(5.33)(p.64)の第3式によって

$$2h \cos \theta = (a - b) \sin 2\theta.$$

代入して

$$\begin{aligned} 2h(\alpha - \beta) &= 4h^2 \sin 2\theta + (a - b)^2 \sin 2\theta \\ &= \{4h^2 + (a - b)^2\} \sin 2\theta. \end{aligned}$$

$h \neq 0$ であるから $4h^2 + (a - b)^2 > 0$ 、また $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より $\sin 2\theta > 0$ 、よって $2h(\alpha - \beta) > 0$ となる。これにより、

$$h > 0 \iff \alpha > \beta, \quad h < 0 \iff \alpha < \beta$$

が示された。 ■

### 5.3.4 2次曲線の分類

この Theorem 5.11 で得られた表現 (5.30)(p. 63) を有心 2 次曲線の標準形 *normal form of central conics* と言う。再記しておこう：

**Definition 5.12** (2 次曲線の標準形)

与えられた  $\mathcal{C} : {}^T \mathbf{x} \mathbf{A} \mathbf{x} = 0$  について、 $\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ ,  $\hat{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ ,  $\delta = \det \mathbf{A}$ ,  $\delta_* = \det \mathbf{A}_*$ ,  $k = -\frac{\delta}{\delta_*}$  とするとき、

$${}^T \hat{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{A}} \hat{\mathbf{x}} = k \iff \alpha X^2 + \beta Y^2 = k \quad (5.35)$$

を、有心 2 次曲線  $\mathcal{C}$  の標準形と言い、(5.35) の形に変形することを、 $\mathcal{C}$  の標準化と言う。

$x^2$  の係数  $a$  について、 $a > 0$  として一般性を失わないから、以下では  $a > 0$  として議論を進める。

### 5.3.5 $\delta_* > 0$ のとき

$\delta_* = \det \mathbf{A}_* = ab - h^2 > 0$  のとき、 $\alpha\beta = \delta_* > 0$  だから、 $\alpha, \beta$  は同符号である。

$$0 < \alpha\beta = ab - h^2 < ab \quad (\because h \neq 0)$$

だから、 $a > 0$  と考え合わせて結局  $\alpha, \beta, a, b$  はすべて正である。

- 1)  $k = -\frac{\delta}{\delta_*} > 0$  であれば,  $\alpha, \beta, k$  がすべて正であるから,  $\alpha X^2 + \beta Y^2 = k$  は

$$\frac{X^2}{A^2} + \frac{Y^2}{B^2} = 1 \quad (5.36)$$

の形に変形可能であり,  $\mathcal{C}$  は楕円 *ellipse* である.

$k = -\frac{\delta}{\delta_*} > 0$ ,  $\delta_* > 0$  だから,  $\delta < 0$ . つまり次が言える:

$\det \mathbf{A}_* > 0$ ,  $\det \mathbf{A} < 0$  ならば,  $\mathcal{C}$  は実の楕円になる.

- 2)  $k = -\frac{\delta}{\delta_*} < 0$  であれば,  $\delta > 0$  となるが, このときは

$$\frac{X^2}{A^2} + \frac{Y^2}{B^2} = -1$$

これをみたす  $X, Y \in \mathbb{R}$  は存在しないから, 平面  $\mathbb{R}^2$  では,  $\mathcal{C}$  は  $\emptyset$  である. これを虚楕円 *imaginary ellipse* と言う.

- 3)  $k = -\frac{\delta}{\delta_*} = 0$  のとき,  $\delta = \det \mathbf{A} = 0$  であるが, このとき

$$\frac{X^2}{A^2} + \frac{Y^2}{B^2} = 0.$$

これをみたす  $\mathbb{R}^2$  上の点は  $(X, Y) = (0, 0)$  のみである.

複素数体  $\mathbb{C}$  で考えれば, この式は

$$\left(\frac{X}{A} + \frac{\mathbf{i}Y}{B}\right) \left(\frac{X}{A} - \frac{\mathbf{i}Y}{B}\right) = 0 \iff \frac{X}{A} + \frac{\mathbf{i}Y}{B} = 0, \quad \frac{X}{A} - \frac{\mathbf{i}Y}{B} = 0$$

であるから, これは「2本の虚直線 *imaginary straight line* になる」と言われることもある.

### 5.3.6 $\delta_* < 0$ のとき

$\delta_* = \det \mathbf{A}_* = ab - h^2 < 0$  のとき,  $\alpha\beta = \delta_* < 0$  だから,  $\alpha, \beta$  は異符号である.

- 1)  $\delta = \det \mathbf{A} \neq 0$  ならば,  $k = -\frac{\delta}{\delta_*} \neq 0$  であるから,  $\alpha X^2 + \beta Y^2 = k$  は

$$\frac{X^2}{A^2} - \frac{Y^2}{B^2} = \pm 1$$

の形に変形される. このとき,  $\mathcal{C}$  は双曲線 *hyperbola* である.

- 2)  $\delta = \det \mathbf{A} = 0$  ならば  $k = 0$  となり,

$$\frac{X^2}{A^2} - \frac{Y^2}{B^2} = \left(\frac{X}{A} + \frac{Y}{B}\right) \left(\frac{X}{A} - \frac{Y}{B}\right) = 0.$$

つまりこのとき, 原点で交わる実の2直線

$$\frac{X}{A} + \frac{Y}{B} = 0, \quad \frac{X}{A} - \frac{Y}{B} = 0$$

を表す.

### 5.3.7 $\delta_* = 0$ のとき

Theorem 5.9(p.60) によって,  $\mathcal{C} : F(x, y) = 0$  は  $\delta_* = \det \mathbf{A}_* = ab - h^2 = 0$  のとき, 無心 2 次曲線となる.

$\tan 2\theta = \frac{2h}{a-b}$  ( $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ) をみたす角  $\theta$  だけの回転によって,  $F(x, y)$  の  $xy$  の項は消えて

$$\mathcal{C} : F = a'\bar{x}^2 + b'\bar{y}^2 + 2g'\bar{x} + 2f'\bar{y} + c = 0 \quad (5.37)$$

となる.  $\det \mathbf{A}_* = \delta_*$  の座標変換における不変性によって,  $a'b' = 0$  であるから,  $a', b'$  のうち一方は 0 である.

$a' = 0, b' \neq 0$  として一般性を失わないから, 以下では  $a' = 0$  として議論を進める.

このときには,  $\mathcal{C}$  は方程式 (5.37) により

$$b'\bar{y}^2 + 2g'\bar{x} + 2f'\bar{y} + c = 0 \quad (5.38)$$

となる.

1)  $g' \neq 0$  ならば, (5.38) は

$$b' \left( \bar{y} + \frac{f'}{b'} \right)^2 = -2g' \left( \bar{x} - \frac{f'^2 - b'c}{2b'g'} \right).$$

$[O; \bar{x}, \bar{y}]$  から  $[O'; X, Y]$  を

$$\bar{x} = X + \frac{f'^2 - b'c}{2b'g'}, \quad \bar{y} = Y - \frac{f'}{b'}$$

により定めれば,  $[O'; X, Y]$  で  $\mathcal{C}$  は

$$Y^2 = -\frac{2g'}{b'}X$$

となり, これは放物線となる.

このとき,  $\mathcal{C}$  の不変量  $\det \mathbf{A} = \delta, \det \mathbf{A}_* = \delta_*$  は

$$\delta = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & g' \\ 0 & b' & f' \\ g' & f' & c \end{vmatrix} = -b'g'^2 \neq 0 \quad (\because b' \neq 0, g' \neq 0),$$

$$\delta_* = \begin{vmatrix} a & h \\ h & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b' \end{vmatrix} = 0$$

である. 以上から, 次のように言える:

$\delta_* = ab - h^2 = 0, \delta \neq 0$  ならば,  $\mathcal{C}$  は放物線になる.

2)  $g' = 0$  のとき,  $\mathcal{C}$  は方程式 (5.38) により

$$b'\bar{y}^2 + 2f'\bar{y} + c = 0$$

となる. この方程式を解いて  $\bar{y} = \alpha, \beta$  が得られるとすると, これは平行な (または一致する) 2 直線 (実, 虚いずれの場合もある) を表す.

$g' = 0$  より  $\delta = \det \mathbf{A} = 0$  であるから,  $\delta_* = ab - h^2 = 0$ ,  $\delta = \det \mathbf{A} = 0$  ならば,  $\mathcal{C}$  は平行な 2 直線を表す.

### 5.3.8 分類に関する主定理

以上から, 我々は, 一般の 2 次曲線について, 次の主定理を得た:

**THEOREM 5.13**  $\mathcal{C} : {}^t\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$ ,  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{A}_* = \begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix}$ ,  $\delta = \det \mathbf{A}$ ,  $\delta_* = \det \mathbf{A}_*$  について,  
 $a > 0$  とすれば

I)  $\delta_* \neq 0$  のとき,  $\mathcal{C}$  は有心 2 次曲線であり,

1)  $\delta_* > 0$  のとき,

- $\delta < 0 \iff$  実の楕円.
- $\delta > 0 \iff$  虚の楕円.
- $\delta = 0 \iff$  2 本の虚の直線.  $\mathbb{R}^2$  では 1 点.

2)  $\delta_* < 0$  のとき,

- $\delta \neq 0 \iff$  双曲線.
- $\delta = 0 \iff$  交わる 2 本の実の直線.

II)  $\delta_* = 0$  のとき,  $\mathcal{C}$  は無心 2 次曲線であり,

- $\delta \neq 0 \iff$  放物線.
- $\delta = 0 \iff$  平行な 2 直線.

## Additional Note.

以上は、2002 年の 3 月に、主に高校 2 年生の諸君の前で公にされた kymst の Paper である。高校数学の道具立ての中で、完全な体系化を図ろうという意図の下で、かなりの長期に渡る奮闘が続いた。『その結果がこの程度か？』と言われればそれまでだが…。

ともあれ、高校数学 C の『いろいろな曲線』の 2 次曲線と『行列』に関して、これが頂点であるという自負を持っている。

この Paper を手にしてくれた諸君が、多少骨が折れるではあろうが、読み進んで質問にでも来てくれれば望外の喜びである。

M3 $\Psi$  の講義本体の中で、この Paper で明らかにされた内容が、諸君の血肉となって結実するはずである。

自信をもって言える。『ここが頂点なのだ !!』

